

# ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES $p$ -ADIQUES ET ( $\varphi, N$ )-MODULES FILTRÉS

par

Laurent Berger

**Résumé.** — L'objet de cet article est de montrer que les deux catégories suivantes sont équivalentes (1) la catégorie des  $(\varphi, N, G_K)$ -modules filtrés (2) la catégorie des  $(\varphi, \Gamma_K)$ -modules sur l'anneau de Robba tels que l'algèbre de Lie de  $\Gamma_K$  agit localement trivialement.

De plus, on montre que sous cette équivalence, les  $(\varphi, N, G_K)$ -modules filtrés admissibles correspondent aux  $(\varphi, \Gamma_K)$ -modules étales, ce qui nous permet de donner une nouvelle démonstration du théorème de Colmez-Fontaine.

**Abstract** ( *$p$ -adic differential equations and filtered  $(\varphi, N)$ -modules*)

The goal of this article is to show that the following two categories are equivalent (1) the category of filtered  $(\varphi, N, G_K)$ -modules (2) the category of  $(\varphi, \Gamma_K)$ -modules over the Robba ring such that the Lie algebra of  $\Gamma_K$  acts locally trivially.

Furthermore, we show that under this equivalence, the admissible filtered  $(\varphi, N, G_K)$ -modules correspond to the étale  $(\varphi, \Gamma_K)$ -modules, which gives a new proof of Colmez-Fontaine's theorem.

## Table des matières

Introduction.....	2
$(\varphi, N, G_K)$ -modules filtrés et $(\varphi, \Gamma_K)$ -modules.....	2
Application aux représentations $p$ -adiques.....	3
I. Rappels et compléments.....	4
I.1. Les $(\varphi, N, G_{L/K})$ -modules filtrés.....	4
I.2. L'anneau de Robba.....	5
I.3. Les $(\varphi, \Gamma_K)$ -modules sur l'anneau de Robba.....	7
II. Construction de $(\varphi, \Gamma_K)$ -modules.....	9
II.1. Recollement de réseaux locaux.....	9
II.2. Des $(\varphi, N, G_{L/K})$ -modules filtrés aux $(\varphi, \Gamma_K)$ -modules.....	11
III. Construction de $(\varphi, N, G_K)$ -modules filtrés.....	13
III.1. L'algèbre de Lie de $\Gamma_K$ .....	13
III.2. Équations différentielles $p$ -adiques.....	15

**Classification mathématique par sujets (2000).** — 11F80, 12H25, 13K05, 14F30.

**Mots clefs.** — représentations  $p$ -adiques, de de Rham,  $(\varphi, N)$ -modules filtrés, équations différentielles  $p$ -adiques.

IV. Pentas de Frobenius.....	17
IV.1. Rappels sur les pentas de Frobenius.....	17
IV.2. Calcul des pentas de $\mathcal{M}(D)$ .....	18
V. Applications aux représentations $p$ -adiques.....	20
V.1. Anneaux de Fontaine et représentations $p$ -adiques.....	20
V.2. Représentations potentiellement semi-stables.....	21
V.3. Construction de $\mathbf{D}^\dagger(V)$ .....	23
Appendice A. Liste des notations.....	26
Appendice B. Erratum à [Ber02].....	26
Références.....	27

## Introduction

Dans tout cet article,  $K$  est un corps local qui contient  $\mathbf{Q}_p$  et qui est muni d'une valuation discrète étendant la valuation  $p$ -adique et pour laquelle  $K$  est complet et de corps résiduel parfait  $k_K$ . Pour  $n \leq \infty$ , on pose  $K_n = K(\mu_{p^n})$  et  $\Gamma_K = \text{Gal}(K_\infty/K)$ .

**$(\varphi, N, G_K)$ -modules filtrés et  $(\varphi, \Gamma_K)$ -modules.** — L'objet de cet article est de construire une équivalence de catégories entre deux catégories utilisées dans la théorie des représentations  $p$ -adiques et des équations différentielles  $p$ -adiques (on se reportera au chapitre I pour des rappels sur ces catégories). Il s'agit de :

(1) la catégorie des  $(\varphi, N, G_K)$ -modules filtrés, dont la sous-catégorie des objets admissibles paramétrise les représentations  $p$ -adiques potentiellement semi-stables du groupe de Galois absolu  $G_K$  du corps  $K$  ;

(2) la catégorie des  $(\varphi, \Gamma_K)$ -modules sur l'anneau de Robba tels que l'algèbre de Lie de  $\Gamma_K$  agit localement trivialement, qui généralise la notion d'équation différentielle  $p$ -adique munie d'une structure de Frobenius.

On construit un foncteur  $D \mapsto \mathcal{M}(D)$  qui à un  $(\varphi, N, G_K)$ -module filtré  $D$  associe un  $(\varphi, \Gamma_K)$ -module  $\mathcal{M}(D)$  sur l'anneau de Robba  $\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^\dagger$  et le résultat principal de cet article est le suivant :

**Théorème A.** — *Le  $\otimes$ -foncteur exact  $D \mapsto \mathcal{M}(D)$ , de la catégorie des  $(\varphi, N, G_K)$ -modules filtrés, dans la catégorie des  $(\varphi, \Gamma_K)$ -modules sur  $\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^\dagger$  dont la connexion associée est localement triviale, est une équivalence de catégories.*

Étant donné un  $(\varphi, N, G_K)$ -module filtré  $D$ , le  $(\varphi, \Gamma_K)$ -module  $\mathcal{M}(D)$  admet (par le théorème [Ked04, théorème 6.10] de Kedlaya) une filtration canonique par les « pentes

de Frobenius ». Nous calculons ces pentes en terme des invariants  $t_H$  et  $t_N$  de  $D$  et de ses sous-objets. Comme corollaire de ces calculs, nous obtenons le résultat suivant :

**Théorème B.** — *Le  $(\varphi, N, G_K)$ -module filtré  $D$  est admissible si et seulement si  $\mathcal{M}(D)$  est étale.*

**Application aux représentations  $p$ -adiques.** — Comme application du théorème B, on obtient une nouvelle démonstration du théorème [CF00, théorème A] de Colmez-Fontaine :

**Théorème.** — *Si  $D$  est un  $(\varphi, N, G_K)$ -module filtré admissible, alors il existe une représentation  $p$ -adique  $V$  potentiellement semi-stable telle que  $\mathbf{D}_{\text{pst}}(V) = D$ .*

Enfin, les constructions précédentes nous permettent de préciser les liens entre les divers invariants que l'on peut associer à une représentation  $p$ -adique potentiellement semi-stable  $V$  (qui devient semi-stable sur une extension galoisienne finie  $L$  de  $K$ ). Ces invariants sont :

- (1) le  $(\varphi, N, G_{L/K})$ -module filtré  $\mathbf{D}_{\text{st},L}(V) = (\mathbf{B}_{\text{st}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_L}$  ;
- (2) l'équation différentielle  $p$ -adique  $\mathbf{N}_{\text{dR}}(V)$  ;
- (3) le  $(\varphi, \Gamma_K)$ -module étale sur l'anneau de Robba  $\mathbf{D}_{\text{rig}}^\dagger(V)$ .

À l'équation différentielle  $p$ -adique  $\mathbf{N}_{\text{dR}}(V)$ , on associe (cf définition III.2.2) son espace  $\text{Sol}_L(\mathbf{N}_{\text{dR}}(V))$  de  $G_L$ -solutions, qui est un  $(\varphi, N, G_{L/K})$ -module, et on montre dans le théorème III.2.3 comment la donnée de  $\mathbf{D}_{\text{rig}}^\dagger(V)$  détermine une filtration sur  $\text{Sol}_L(\mathbf{N}_{\text{dR}}(V))$ , ce qui en fait un  $(\varphi, N, G_{L/K})$ -module filtré. On a alors (les notations restantes sont définies dans le corps du texte) :

**Théorème C.** — *Si  $V$  est une représentation  $p$ -adique de  $G_K$  semi-stable quand on la restreint à  $G_L$ , alors :*

- (1)  $\mathbf{D}_{\text{st},L}(V) = \text{Sol}_L(\mathbf{N}_{\text{dR}}(V))$  ;
- (2)  $\mathbf{D}_{\text{rig}}^\dagger(V) = \mathcal{M}(\mathbf{D}_{\text{st},L}(V))$  ;
- (3)  $\mathbf{N}_{\text{dR}}(V) = (\mathbf{B}_{\text{rig},L}^\dagger[\ell_X] \otimes_{L_0} \mathbf{D}_{\text{st},L}(V))^{\text{Gal}(L_\infty/K_\infty), N=0}$ .

*Ces identifications sont compatibles à toutes les structures en présence.*

Cela permet notamment de « retrouver la filtration » sur  $\mathbf{D}_{\text{st},L}(V)$  quand on le construit à partir de  $\mathbf{D}_{\text{rig}}^\dagger(V)$  (cf [Col01, proposition 5.6] pour une construction similaire).

Enfin, nous montrons comment reconstruire, pour une représentation semi-stable  $V$ , le  $(\varphi, \Gamma_K)$ -module  $\mathbf{D}^\dagger(V)$  sur  $\mathbf{B}_K^\dagger$  à partir de  $\mathbf{D}_{\text{st}}(V)$  (comme dans [Col04, §4.3.1]).

**Théorème D.** — *Si  $V$  est une représentation semi-stable de  $G_K$  et si*

–  $\{e_i\}_{i=1\dots d}$  est une base de  $\mathbf{D}_{\text{st}}(V)$  adaptée à la décomposition par les pentes de Frobenius ;  
 –  $N(e_i) = \sum_{j=1}^d n_{j,i} e_j$  ;  
 –  $\{f_j\}_{j=1\dots d}$  est une base de  $\mathbf{D}_{\text{dR}}(V)$  adaptée à la filtration et  $\varphi^{-n}(e_i) = \sum_{j=1}^d p_{j,i}^{(n)} f_j$ ,  
 alors  $x = \sum_{i=1}^d x_i(X) \otimes e_i \in \mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}[\ell_X, 1/t] \otimes_{K_0} \mathbf{D}_{\text{st}}(V)$  appartient à  $\mathbf{D}^{\dagger,r}(V)$  si et seulement si :

- (1)  $N(x_j) + \sum_{i=1}^d n_{j,i} x_i = 0$  pour  $j = 1 \dots d$  ;
- (2)  $\sum_{i=1}^d \iota_n(x_i) p_{j,i}^{(n)} \in t^{-t_H(f_j)} K_n[[t]]$  pour  $j = 1 \dots d$  et  $n \geq n(r)$  ;
- (3)  $\text{ord}(x_i) \leq -\text{pente}(e_i)$  pour  $i = 1 \dots d$ .

Ceci permet de construire « explicitement » les éléments de  $\mathbf{D}^{\dagger,r}(V)$  ce qui a des applications directes à la théorie des représentations de  $\text{GL}(2, \mathbf{Q}_p)$  de Breuil.

**Remerciements :** Je remercie Pierre Colmez, Jean-Marc Fontaine et Kiran Kedlaya pour des discussions éclairantes sur certains points de cet article.

## I. Rappels et compléments

Dans tout cet article,  $K$  est un corps local qui contient  $\mathbf{Q}_p$  et qui est muni d’une valuation discrète étendant la valuation  $p$ -adique et pour laquelle  $K$  est complet et de corps résiduel parfait  $k_K$ .

On écrit  $\mu_{p^n} \subset \overline{K}$  (la clôture algébrique de  $K$ ) pour désigner l’ensemble des racines  $p^n$ -ièmes de l’unité, et pour  $n \geq 1$ , on définit  $K_n = K(\mu_{p^n})$  ainsi que  $K_\infty = \bigcup_{n=1}^{+\infty} K_n$ . Si  $n = 0$ , on pose  $K_0 = W(k_K)[1/p]$  ce qui fait que  $K/K_0$  est totalement ramifiée. Les notations ne sont donc pas vraiment compatibles, mais elles sont usuelles. Finalement,  $K'_0$  désigne l’extension maximale non-ramifiée de  $K_0$  contenue dans  $K_\infty$ .

Soient  $G_K = \text{Gal}(\overline{K}/K)$  et  $H_K = \text{Gal}(\overline{K}/K_\infty)$  le noyau du caractère cyclotomique  $\chi : G_K \rightarrow \mathbf{Z}_p^*$  et  $\Gamma_K = G_K/H_K$  le groupe de Galois de  $K_\infty/K$ , qui s’identifie via le caractère cyclotomique à un sous-groupe ouvert de  $\mathbf{Z}_p^*$ . On note  $\sigma$  le Frobenius absolu (qui relève  $x \mapsto x^p$  sur  $k_K^{\text{sep}}$ ).

**I.1. Les  $(\varphi, N, G_{L/K})$ -modules filtrés.** — Le corps  $L$  désigne une extension galoisienne finie de  $K$ , et  $G_{L/K}$  le groupe de Galois de  $L/K$ . La catégorie des  $(\varphi, N, G_{L/K})$ -modules filtrés et sa sous-catégorie pleine de  $(\varphi, N, G_{L/K})$ -modules filtrés admissibles sont étudiées en détail dans [Fo94b, §4]. Nous nous contentons donc de rappeler les définitions et quelques résultats dont nous aurons besoin par la suite.

Un  $(\varphi, N, G_{L/K})$ -module est un  $L_0$ -espace vectoriel  $D$  de dimension finie et muni d'une application  $\sigma$ -semi-linéaire bijective  $\varphi : D \rightarrow D$ , d'une application linéaire  $N : D \rightarrow D$  qui vérifie  $N\varphi = p\varphi N$  et d'une action semi-linéaire de  $G_{L/K}$  qui commute à  $\varphi$  et  $N$ . Si  $L = K$ , on parle tout simplement de  $(\varphi, N)$ -module (relatif à  $K$ ).

Un  $(\varphi, N, G_{L/K})$ -module filtré est la donnée d'un  $(\varphi, N, G_{L/K})$ -module  $D$  et d'une filtration décroissante exhaustive et séparée  $\mathrm{Fil}^i D_L$  sur  $D_L = L \otimes_{L_0} D$ , par des sous  $L$ -espaces vectoriels stables par  $G_{L/K}$ . Il est équivalent de se donner une filtration sur  $D_K = D_L^{G_{L/K}}$ .

La catégorie des  $(\varphi, N, G_{L/K})$ -modules filtrés est une catégorie additive  $\mathbf{Q}_p$ -linéaire qui admet des noyaux et des conoyaux (mais qui n'est pas abélienne), ainsi que des produits tensoriels et des Hom internes.

Par abus de langage, on dira que  $D$  est un  $(\varphi, N, G_K)$ -module filtré s'il existe une extension finie galoisienne  $L/K$  telle que  $D$  est un  $(\varphi, N, G_{L/K})$ -module filtré.

Si  $D$  est un  $(\varphi, N, G_{L/K})$ -module filtré de dimension 1, on définit  $t_H(D)$  comme le plus grand entier  $i$  tel que  $\mathrm{Fil}^i D_L \neq 0$  et si  $\varphi(d) = \lambda d$  avec  $d \in D$ , alors  $v_p(\lambda)$  ne dépend pas du choix de  $d \neq 0$  et on définit  $t_N(D) = v_p(\lambda)$ . Si  $D$  est un  $(\varphi, N, G_{L/K})$ -module filtré de dimension  $\geq 1$ , on définit  $t_H(D) = t_H(\det D)$  et  $t_N(D) = t_N(\det D)$ . Si  $e \in D_L$ , on pose  $t_H(e) = t_H(L \cdot e)$ .

On dit qu'un  $(\varphi, N, G_{L/K})$ -module filtré  $D$  est admissible si  $t_H(D) = t_N(D)$  et si pour tout sous-objet  $D'$  de  $D$ , on a  $t_N(D') - t_H(D') \geq 0$ . La catégorie des  $(\varphi, N, G_{L/K})$ -modules filtrés admissibles est une sous-catégorie pleine de la catégorie des  $(\varphi, N, G_{L/K})$ -modules filtrés et elle est de plus abélienne.

Rappelons que la principale source de  $(\varphi, N, G_{L/K})$ -modules filtrés admissibles est la suivante : si  $V$  est une représentation  $p$ -adique de  $G_K$  dont la restriction à  $G_L$  est semi-stable, alors  $\mathbf{D}_{\mathrm{st}, L}(V)$  est un  $(\varphi, N, G_{L/K})$ -module filtré admissible.

**I.2. L'anneau de Robba.** — Définissons ici quelques anneaux de séries formelles (ces constructions sont faites en détail dans [Col03]). Si  $r$  est un réel positif et  $F = K_0$  (pour alléger un peu les notations), soit  $\mathbf{B}_F^{\dagger, r}$  l'anneau des séries formelles  $f(X) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k X^k$  où  $\{a_k \in F\}_{k \in \mathbf{Z}}$  est une suite bornée telle que  $f(X)$  converge sur la couronne  $0 < v_p(X) \leq 1/r$ . Cet anneau est muni d'une action de  $\Gamma_F$ , qui est triviale sur les coefficients et donnée par  $\gamma(X) = (1 + X)^{\chi(\gamma)} - 1$  et on peut définir un Frobenius  $\varphi : \mathbf{B}_F^{\dagger, r} \rightarrow \mathbf{B}_F^{\dagger, pr}$  qui est  $\sigma$ -semi-linéaire sur les coefficients et tel que  $\varphi(X) = (1 + X)^p - 1$ . Le « théorème de préparation de Weierstrass » montre que  $\mathbf{B}_F^{\dagger} = \cup_{r \geq 0} \mathbf{B}_F^{\dagger, r}$  est un corps. Ce corps n'est pas complet pour la

norme de Gauss et on appelle  $\mathbf{B}_F$  son complété qui est un corps local de dimension 2 dont le corps résiduel s'identifie à  $k_K((\overline{X}))$ .

L'extension  $K_\infty/F_\infty$  est une extension finie de degré de ramification  $e_K \leq [K_\infty : F_\infty]$  et par la théorie du corps de normes de [FW79, Win83] il lui correspond une extension séparable  $k'_K((\overline{X}_K))/k_K((\overline{X}))$  de degré  $[K_\infty : F_\infty]$  qui nous permet de définir des extensions non-ramifiées  $\mathbf{B}_K/\mathbf{B}_F$  et  $\mathbf{B}_K^\dagger/\mathbf{B}_F^\dagger$  de degré  $[K_\infty : F_\infty]$ . On peut montrer que  $\mathbf{B}_K^\dagger = \cup_{r \geq 0} \mathbf{B}_K^{\dagger,r}$  et qu'il existe  $r_0(K)$  tel que si  $r \geq r_0(K)$ , alors  $\mathbf{B}_K^{\dagger,r}$  est un  $\mathbf{B}_F^{\dagger,r}$ -module libre de rang  $[K_\infty : F_\infty]$  qui s'identifie à un anneau de séries formelles  $f(X_K) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k X_K^k$  où  $\{a_k \in K'_0\}_{k \in \mathbf{Z}}$  est une suite bornée telle que  $f(X_K)$  converge sur la couronne  $0 < v_p(X_K) \leq 1/e_K r$ . L'élément  $\overline{X}_K$  vérifie une équation d'Eisenstein sur  $k'_K((\overline{X}))$  qu'on peut relever en une équation sur  $\mathbf{B}_{K'_0}^{\dagger,r}$ ; l'action de  $\Gamma_K$  s'étend naturellement à  $\mathbf{B}_K^{\dagger,r}$  de même que le Frobenius  $\varphi : \mathbf{B}_K^{\dagger,r} \rightarrow \mathbf{B}_K^{\dagger,pr}$ .

L'anneau  $\mathbf{B}_K^{\dagger,r}$  s'identifiant à un anneau de séries formelles convergeant sur une couronne, il est naturellement muni d'une topologie de Fréchet, la topologie de la « convergence compacte » sur les couronnes  $C_K[r; s] = \{z \in \mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}, 1/e_K s \leq v_p(z) \leq 1/e_K r\}$  pour  $s \geq r$ , et son complété  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}$  pour cette topologie s'identifie à l'anneau de séries formelles  $f(X_K) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k X_K^k$  où  $\{a_k \in K'_0\}_{k \in \mathbf{Z}}$  est une suite non nécessairement bornée telle que  $f(X_K)$  converge sur la couronne  $0 < v_p(X_K) \leq 1/e_K r$ . Par exemple, si on pose  $t = \log(1 + X)$ , alors  $t \in \mathbf{B}_{\text{rig},F}^{\dagger,r} \subset \mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}$  pour tout  $r \geq 0$ . L'anneau  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger = \cup_{r \geq 0} \mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}$  est « l'anneau de Robba ». Nous allons rappeler quelques-uns des résultats de [Ber02, §4] qui nous seront utiles dans la suite.

Il existe  $r(K)$  que l'on peut supposer  $\geq r_0(K)$  tel que si  $p^{n-1}(p-1) \geq r \geq r(K)$ , alors on a une application injective  $\iota_n : \mathbf{B}_K^{\dagger,r} \rightarrow K_n[[t]]$  (c'est l'application  $\varphi^{-n}$  de [CC99, §III.2]). Par exemple si  $K = K_0$ , alors  $\iota_n(X) = \varepsilon^{(n)} \exp(t/p^n) - 1$  où  $\varepsilon^{(n)}$  est une racine primitive  $p^n$ -ième de 1 et  $\iota_n$  agit par  $\sigma^{-n}$  sur les coefficients. On définit  $n(r)$  comme étant le plus petit entier  $n$  tel que  $p^{n-1}(p-1) \geq r$  ce qui fait que  $\iota_n : \mathbf{B}_K^{\dagger,r} \rightarrow K_n[[t]]$  est définie dès que  $n \geq n(r)$ .

L'application  $\iota_n$  se prolonge en une application injective  $\iota_n : \mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r} \rightarrow K_n[[t]]$ . L'action de  $\Gamma_K$  sur  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}$  s'étend en une action de l'algèbre de Lie de  $\Gamma_K$  donnée par  $\nabla(f) = \log(\gamma)(f)/\log_p(\chi(\gamma))$  pour  $\gamma \in \Gamma_K$  assez proche de 1. Si  $f = f(X) \in \mathbf{B}_{\text{rig},F}^{\dagger,r}$  alors  $\nabla(f(X)) = t(1+X)df/dX$ . Si  $f \in \mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}$  alors on pose  $\partial(f) = t^{-1}\nabla(f)$  ce qui fait que si  $f = f(X) \in \mathbf{B}_{\text{rig},F}^{\dagger,r}$  alors  $\partial(f(X)) = (1+X)df/dX$  et que si  $f \in \mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger$  vérifie une équation algébrique  $P(f) = 0$  sur  $\mathbf{B}_{\text{rig},F}^\dagger$  telle que  $P'(f) \neq 0$ , alors on peut aussi calculer  $\partial(f)$  par la formule  $\partial(f) = -(\partial P)(f)/P'(f)$ . En particulier  $\partial(f) = 0$  si et seulement si  $f \in K'_0$ .

**Lemme I.2.1.** — *Si  $w \geq 1$  alors il existe  $t_{n,w} \in \mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}$  tel que  $\iota_n(t_{n,w}) = 1 \pmod{t^w K_n[[t]]}$  et  $\iota_m(t_{n,w}) \in t^w K_n[[t]]$  si  $m \neq n$ .*

*Démonstration.* — C'est une conséquence immédiate de la solution du problème des « parties principales » (voir [Laz62, §8]).  $\square$

Rappelons que les anneaux  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}$  et donc aussi  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger}$  sont des anneaux de Bézout, c'est-à-dire que tout idéal de type fini en est principal. Ceci a un certain nombre de conséquences pour lesquelles on se reportera par exemple à [Ked04, §2]. Dans la suite, on pose  $q = \varphi(X)/X = ((1+X)^p - 1)/X$ , ce qui fait que  $\iota_n(\varphi^{n-1}(q))$  est une uniformisante de  $K_n[[t]]$ .

**Proposition I.2.2.** — *Si  $I$  est un idéal principal de  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}$ , qui divise  $(t^h)$  pour  $h \geq 0$ , alors  $I$  est engendré par un élément de la forme  $\prod_{n=n(r)}^{+\infty} (\varphi^{n-1}(q)/p)^{j_n}$  avec  $j_n \leq h$ .*

*Démonstration.* — Rappelons que l'on a une décomposition  $t = X \cdot \prod_{n=1}^{+\infty} (\varphi^{n-1}(q)/p)$ . Le lemme [Ber02, lemme 4.9] montre que  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}/\varphi^{n-1}(q) \simeq K_n$  et donc que les idéaux  $(\varphi^{n-1}(q))$  sont premiers (et même maximaux) dans  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}$ . Ceci montre que si  $x$  divise  $t^h$ , alors  $x$  est le produit d'une unité par un élément de la forme  $\prod_{n=n(r)}^{+\infty} (\varphi^{n-1}(q)/p)^{j_n}$  et il reste à appliquer cela à un générateur de l'idéal  $I$ .  $\square$

**I.3. Les  $(\varphi, \Gamma_K)$ -modules sur l'anneau de Robba.** — Dans ce paragraphe, nous rappelons la définition des  $\varphi$ -modules et des  $(\varphi, \Gamma_K)$ -modules sur l'anneau de Robba ainsi que quelques résultats techniques concernant ces objets. Pour des définitions d'ordre plus général, on peut voir [Ked04, §2.5]. Un  $\varphi$ -module sur  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger}$  est un  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger}$ -module  $\mathbf{D}$  libre de rang fini (noté  $d$ ) et muni d'une application  $\varphi$ -semi-linéaire toujours notée  $\varphi : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}$  telle que  $\varphi^*(\mathbf{D}) = \mathbf{D}$  (on note  $\varphi^*(\mathbf{D})$  le  $\varphi$ -module engendré par  $\varphi(\mathbf{D})$ ). Un  $(\varphi, \Gamma_K)$ -module sur  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger}$  est un  $\varphi$ -module muni en plus d'une action de  $\Gamma_K$  semi-linéaire par rapport l'action de ce groupe sur  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger}$  et commutant à  $\varphi$ . On a un résultat de descente galoisienne (voir aussi [Ked04, §2.5]) pour les  $(\varphi, \Gamma_K)$ -modules.

**Définition I.3.1.** — Si  $L/K$  est une extension galoisienne finie, et si  $\mathbf{D}$  est un  $(\varphi, \Gamma_L)$ -module sur  $\mathbf{B}_{\text{rig},L}^{\dagger}$ , on dit que  $\mathbf{D}$  est muni d'une action de  $G_{L/K}$  si le groupe  $G_K$  agit sur  $\mathbf{D}$  et si de plus :

- (1)  $H_L \subset G_K$  agit trivialement sur  $\mathbf{D}$ ;
- (2) l'action de  $G_L/H_L \subset G_K/H_L$  induite coïncide avec celle de  $\Gamma_L$ .

La proposition suivante se trouve essentiellement dans [Ked04, corollary 2.7] :

**Proposition I.3.2.** — *Si  $L/K$  est une extension galoisienne finie et si  $\mathbf{D}$  est un  $(\varphi, \Gamma_L)$ -module sur  $\mathbf{B}_{\text{rig},L}^{\dagger}$  muni d'une action de  $G_{L/K}$ , alors  $\mathbf{D}^{H_K}$  est un  $(\varphi, \Gamma_K)$ -module et  $\mathbf{D} = \mathbf{B}_{\text{rig},L}^{\dagger} \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger}} \mathbf{D}^{H_K}$ .*

*Démonstration.* — L'action de  $\Gamma_K$  sur  $\mathbf{D}^{H_K}$  est donnée par l'isomorphisme  $\Gamma_K = G_K/H_K$ . Le fait que  $\mathbf{D} = \mathbf{B}_{\text{rig},L}^\dagger \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger} \mathbf{D}^{H_K}$  suit de [Ked04, lemma 2.6] (par exemple). Montrons que  $\varphi^*(\mathbf{D}^{H_K}) = (\mathbf{D}^{H_K})$ . Si  $x \in \mathbf{D}^{H_K}$ , et si  $\{y_i\}$  est une base de  $\mathbf{D}$  sur  $\mathbf{B}_{\text{rig},L}^\dagger$  contenue dans  $\mathbf{D}^{H_K}$ , alors on peut écrire  $x = \sum_{i=1}^d x_i \varphi(y_i)$  avec  $x_i \in \mathbf{B}_{\text{rig},L}^\dagger$  et comme  $x$  et les  $y_i$  sont fixes par  $H_K$ , on a aussi  $x_i \in \mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger$  ce qui fait que  $x \in \varphi^*(\mathbf{D}^{H_K})$ .  $\square$

Le théorème suivant est une variante d'un résultat de Cherbonnier (voir [Che96]).

**Théorème I.3.3.** — *Si  $\mathbf{D}$  est un  $\varphi$ -module sur  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger$  alors il existe  $r(\mathbf{D}) \geq r(K)$  tel que pour tout  $r \geq r(\mathbf{D})$ , il existe un unique sous  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}$ -module  $\mathbf{D}_r$  de  $\mathbf{D}$  vérifiant les propriétés suivantes :*

- (1)  $\mathbf{D} = \mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}} \mathbf{D}_r$  ;
- (2) le  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,pr}$ -module  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,pr} \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}} \mathbf{D}_r$  a une base contenue dans  $\varphi(\mathbf{D}_r)$ .

En particulier, on a  $\mathbf{D}_s = \mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s} \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}} \mathbf{D}_r$  pour tous  $s \geq r$  et si  $\mathbf{D}$  est un  $(\varphi, \Gamma_K)$ -module, alors  $\gamma(\mathbf{D}_r) = \mathbf{D}_r$  pour tout  $\gamma \in \Gamma_K$ .

*Démonstration.* — Comme  $\mathbf{D}$  est un  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger$ -module libre de rang  $d$ , il en existe une base  $e_1, \dots, e_d$ . Il existe alors  $r = r(\mathbf{D})$  tel que la matrice de  $\varphi$  dans cette base est dans  $\text{GL}(d, \mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r})$  et si l'on pose  $\mathbf{D}_r = \bigoplus_{i=1}^d \mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r} e_i$ , alors les deux conditions du théorème sont remplies. Si  $\mathbf{D}_r^{(1)}$  et  $\mathbf{D}_r^{(2)}$  sont deux  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}$ -modules satisfaisant les deux conditions ci-dessus, et qu'on en choisit des bases, alors la matrice  $M$  de passage d'une base à l'autre et les matrices  $P_1$  et  $P_2$  de  $\varphi$  dans ces deux bases vont satisfaire la relation  $\varphi(M) = P_1^{-1} M P_2$  avec  $P_1$  et  $P_2 \in \text{GL}(d, \mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,pr})$  ce qui implique que  $M \in \text{M}(d, \mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r})$ . En effet, si  $M \in \text{M}(d, \mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s})$  avec  $s > pr$ , alors  $P_1^{-1} M P_2$  et donc  $\varphi(M)$  est dans  $\text{M}(d, \mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s})$ . Mais  $\varphi(\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s}) \cap \mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s} = \varphi(\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s/p})$  ce qui fait que si  $s > pr$ , alors on peut remplacer  $s$  par  $s/p$  et donc finalement que  $M \in \text{M}(d, \mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r})$ . Comme on peut en dire autant de  $M^{-1}$ , c'est que  $M \in \text{GL}(d, \mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r})$  et donc finalement que  $\mathbf{D}_r^{(1)} = \mathbf{D}_r^{(2)}$ .  $\square$

Étant donné un  $\varphi$ -module  $\mathbf{D}$  sur l'anneau de Robba, et  $n \geq n(r)$  avec  $r \geq r(\mathbf{D})$ , l'application  $\iota_n : \mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r} \rightarrow K_n[[t]]$  donne une structure de  $\iota_n(\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r})$ -module à  $K_n[[t]]$  et la formule  $\iota_n(\lambda) \cdot x = \lambda x$  donne une structure de  $\iota_n(\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r})$ -module à  $\mathbf{D}_r$  que l'on note alors  $\iota_n(\mathbf{D}_r)$ , ce qui nous permet de définir  $K_n[[t]] \otimes_{\iota_n(\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r})} \iota_n(\mathbf{D}_r)$ . Pour alléger les notations, on écrit plutôt :  $K_n[[t]] \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}}^{\iota_n} \mathbf{D}_r$ .

**Proposition I.3.4.** — *Si  $\mathbf{D}$  est un  $\varphi$ -module de rang  $d$  sur  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger$  et si  $\mathbf{D}^{(1)}$  et  $\mathbf{D}^{(2)}$  sont deux sous- $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger$ -modules libres de rang  $d$  de  $\mathbf{D}[1/t] = \mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger[1/t] \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger} \mathbf{D}$  tels que :*



- (1)  $\mathbf{D}^{(i)}[1/t] = \mathbf{D}[1/t]$  si  $i = 1, 2$ ;
- (2)  $K_n[[t]] \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}}^{\iota_n} \mathbf{D}_r^{(1)} = K_n[[t]] \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}}^{\iota_n} \mathbf{D}_r^{(2)}$  pour tout  $n \gg 0$ ,

alors  $\mathbf{D}^{(1)} = \mathbf{D}^{(2)}$ .

*Démonstration.* — Comme  $\mathbf{D}^{(1)}[1/t] = \mathbf{D}^{(2)}[1/t]$ , il existe  $h \geq 0$  tel que  $t^h \mathbf{D}^{(2)} \subset \mathbf{D}^{(1)}$ . Choisissons  $r$  tel que  $r \geq \max(r(\mathbf{D}^{(1)}), r(\mathbf{D}^{(2)}))$  et tel qu'en plus

$$K_n[[t]] \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}}^{\iota_n} \mathbf{D}_r^{(1)} = K_n[[t]] \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}}^{\iota_n} \mathbf{D}_r^{(2)}$$

pour tout  $n \geq n(r)$ . Les diviseurs élémentaires de  $t^h \mathbf{D}^{(2)} \subset \mathbf{D}^{(1)}$  sont des idéaux de  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}$  qui divisent  $t^h$  et donc de la forme  $(\prod_{n \geq n(r)} \varphi^{n-1}(q^{\beta_{n,i}}))$  pour  $i = 1, \dots, d$  par la proposition I.2.2. Comme le calcul des diviseurs élémentaires commute à la localisation, on voit que ceux de l'inclusion  $t^h K_n[[t]] \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}}^{\iota_n} \mathbf{D}_r^{(2)} \subset K_n[[t]] \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}}^{\iota_n} \mathbf{D}_r^{(1)}$  sont donnés par les idéaux  $(t^{\beta_{n,i}})$  ce qui fait que  $\beta_{n,i} = h$  pour tous  $n, i$  et donc finalement que  $\mathbf{D}^{(1)} = \mathbf{D}^{(2)}$ .  $\square$

## II. Construction de $(\varphi, \Gamma_K)$ -modules

L'objet de ce chapitre est de montrer comment construire un  $\varphi$ -module sur  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger}$ , c'est-à-dire un objet « global », à partir de conditions locales. Comme application, on donne la construction d'un  $(\varphi, \Gamma_K)$ -module sur  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger}$  à partir d'un  $(\varphi, N, G_{L/K})$ -module filtré.

**II.1. Recollement de réseaux locaux.** — Si  $\mathbf{D}$  est un  $\varphi$ -module sur  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger}$  alors on a une application naturelle :

$$\varphi_n : K_{n+1}((t)) \otimes_{K_n((t))} \left[ K_n((t)) \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}}^{\iota_n} \mathbf{D}_r \right] \longrightarrow K_{n+1}((t)) \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}}^{\iota_{n+1}} \mathbf{D}_r$$

définie par  $\varphi_n[f(t) \otimes (g(t) \otimes \iota_n(x))] = f(t)g(t) \otimes \iota_{n+1}(\varphi(x))$  en utilisant le fait que  $\varphi(\mathbf{D}_r) \subset \mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,pr} \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}} \mathbf{D}_r$ , que  $\iota_{n+1}(\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,pr}) \subset K_{n+1}[[t]]$  et que  $\iota_{n+1}(\varphi(x)) = \iota_n(x)$ .

**Définition II.1.1.** — Si  $\mathbf{D}$  est un  $\varphi$ -module sur  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger}$  et si  $r \geq r(\mathbf{D})$  et  $\{M_n\}_{n \geq n(r)}$  est une suite de  $K_n[[t]]$ -réseaux de  $K_n((t)) \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}}^{\iota_n} \mathbf{D}_r$ , alors on dit que  $\{M_n\}$  est une suite  $\varphi$ -compatible si  $\varphi_n(K_{n+1}[[t]] \otimes_{K_n[[t]]} M_n) = M_{n+1}$ .

On vérifie sans mal que la donnée d'un sous- $\varphi$ -module  $\mathbf{M}$  de rang maximal d'un  $\varphi$ -module  $\mathbf{D}$  détermine une suite  $\varphi$ -compatible de  $K_n[[t]]$ -réseaux de  $K_n((t)) \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}}^{\iota_n} \mathbf{D}_r$  en posant  $M_n = K_n[[t]] \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}}^{\iota_n} \mathbf{M}_r$ . Le théorème suivant donne la réciproque de cette construction.

**Théorème II.1.2.** — Si  $\mathbf{D}$  est un  $\varphi$ -module sur  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger$  et si  $\{M_n\}_{n \geq n(r)}$  est une suite  $\varphi$ -compatible de réseaux de  $K_n((t)) \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}} \mathbf{D}_r$ , alors il existe un unique sous  $\varphi$ -module  $\mathbf{M}$  de  $\mathbf{D}[1/t]$  tel que  $K_n[[t]] \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}} \mathbf{M}_r = M_n$  pour tout  $n \geq n(r)$ . Enfin, on a  $\mathbf{M}[1/t] = \mathbf{D}[1/t]$ .

Si  $\mathbf{D}$  est un  $(\varphi, \Gamma_K)$ -module et si les  $M_n$  sont stables sous l'action induite de  $\Gamma_K$ , alors  $\mathbf{M}$  est lui aussi un  $(\varphi, \Gamma_K)$ -module.

L'unicité de  $\mathbf{M}$  résulte immédiatement de la proposition I.3.4 et le reste de ce paragraphe est consacré à la démonstration de l'existence d'un tel  $\mathbf{M}$ .

**Lemme II.1.3.** — Il existe un entier  $h \geq 0$  tel que pour tout  $n \geq n(r)$  on ait

$$t^h K_n[[t]] \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}} \mathbf{D}_r \subset M_n \subset t^{-h} K_n[[t]] \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}} \mathbf{D}_r.$$

*Démonstration.* — Comme  $M_{n(r)}$  est un réseau de  $K_{n(r)}((t)) \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}} \mathbf{D}_r$ , il existe  $h$  tel que l'inclusion ci-dessus est vraie pour  $n = n(r)$ . Le fait que

$$\varphi_n(K_{n+1}[[t]] \otimes_{K_n[[t]]} K_n[[t]] \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}} \mathbf{D}_r) = K_{n+1}[[t]] \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}} \mathbf{D}_r$$

et que  $\varphi_n(K_{n+1}[[t]] \otimes_{K_n[[t]]} M_n) = M_{n+1}$  montrent que si l'inclusion est vraie pour  $n$  elle est aussi vraie pour  $n+1$ , ce qui montre le lemme par récurrence.  $\square$

**Lemme II.1.4.** — Si on pose  $\mathbf{M}_r = \{x \in t^{-h} \mathbf{D}_r \text{ tels que } \iota_n(x) \in M_n \text{ pour tout } n \geq n(r)\}$ , alors  $\mathbf{M}_r$  est un  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}$ -module libre de rang  $d$ .

*Démonstration.* — Comme les applications  $\iota_n : t^{-h} \mathbf{D}_r \rightarrow M_n[1/t]$  sont continues,  $\mathbf{M}_r$  est fermé dans  $t^{-h} \mathbf{D}_r$ . D'autre part, le lemme II.1.3 montre que  $t^h \mathbf{D}_r \subset \mathbf{M}_r$  et le théorème de Forster (cf [Ber02, théorème 4.10] pour une démonstration) montre alors que  $\mathbf{M}_r$  est un  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}$ -module libre de rang  $d$ .  $\square$

**Lemme II.1.5.** — On a  $K_n[[t]] \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}} \mathbf{M}_r = M_n$  pour tout  $n \geq n(r)$ .

*Démonstration.* — Comme  $K_n[[t]] \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}} \mathbf{M}_r$  et  $M_n$  sont complets pour la topologie  $t$ -adique, il suffit de montrer que l'application naturelle  $K_n[[t]] \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}} \mathbf{M}_r \rightarrow M_n/t^h M_n$  est surjective pour tout  $n$ . Si  $x \in M_n$ , alors le lemme II.1.3 montre qu'il existe  $y \in t^{-h} \mathbf{D}_r$  tel que  $\iota_n(y) - x \in t^h M_n$ . Le lemme I.2.1 appliqué à  $w = 3h$  nous donne un élément  $t_{n,3h}$  et on pose  $z = t_{n,3h} y$  ce qui fait que

$$\iota_n(z) - \iota_n(y) \in t^{2h} K_n[[t]] \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}} \mathbf{D}_r \subset t^h M_n$$

tandis que si  $m \neq n$  alors

$$\iota_m(z) \in t^{2h} K_m[[t]] \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}} \mathbf{D}_r \subset t^h M_m \subset M_m$$

ce qui fait finalement que  $z \in \mathbf{M}_r$  et on trouve bien que l'application naturelle

$$K_n[[t]] \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger, r}}^{\iota_n} \mathbf{M}_r \rightarrow M_n/t^h M_n$$

est surjective.  $\square$

*Démonstration du théorème II.1.2.* — Les deux lemmes précédents montrent que si l'on pose  $\mathbf{M}_r = \{x \in t^{-h} \mathbf{D}_r \text{ tels que } \iota_n(x) \in M_n \text{ pour tout } n \geq n(r)\}$ , alors  $\mathbf{M}_r$  est un  $\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger, r}$ -module libre de rang  $d$  et  $K_n[[t]] \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger, r}}^{\iota_n} \mathbf{M}_r = M_n$  pour tout  $n \geq n(r)$  et qu'on peut donc poser  $\mathbf{M} = \mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger} \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger, r}} \mathbf{M}_r$ . Le fait que la suite de réseaux  $\{M_n\}$  est  $\varphi$ -compatible montre que  $\varphi^*(\mathbf{M}) \subset \mathbf{M}$  et que  $K_n[[t]] \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger, r}}^{\iota_n} \varphi^*(\mathbf{M})_{pr} = M_n$  pour tout  $n \geq n(pr)$  et la proposition I.3.4 appliquée à  $\mathbf{D}^{(1)} = \mathbf{M}$  et  $\mathbf{D}^{(2)} = \varphi^*(\mathbf{M})$  montre alors qu'en fait  $\varphi^*(\mathbf{M}) = \mathbf{M}$ . Enfin le fait que  $\mathbf{M}[1/t] = \mathbf{D}[1/t]$  suit immédiatement du lemme II.1.4.

L'assertion quant à l'action éventuelle de  $\Gamma_K$  est évidente.  $\square$

**II.2. Des  $(\varphi, N, G_{L/K})$ -modules filtrés aux  $(\varphi, \Gamma_K)$ -modules.** — Soit  $\ell_X$  une variable; on prolonge les actions de  $\varphi$  et de  $\Gamma_K$  à  $\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger}[\ell_X]$  par les formules suivantes :  $\varphi(\ell_X) = p\ell_X + \log(\varphi(X)/X^p)$  et  $\gamma(\ell_X) = \ell_X + \log(\gamma(X)/X)$ . Bien sûr, il faut penser à  $\ell_X$  comme à «  $\log(X)$  ». On définit alors un opérateur de monodromie  $N$  sur  $\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger}[\ell_X]$  par la formule  $N(\ell_X) = -p/(p-1)$  et on prolonge l'application  $\iota_n$  à  $\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger, r}[\ell_X]$  par  $\iota_n(\ell_X) = \log(\varepsilon^{(n)} \exp(t/p^n) - 1) \in K_n[[t]]$ .

Si  $D$  est un  $(\varphi, N)$ -module filtré (relatif à  $K$ ), on pose  $\mathbf{D} = (\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger}[\ell_X] \otimes_F D)^{N=0}$ . Pour tout  $n \in \mathbf{Z}$ , on a  $K_0 = \varphi^{-n}(K_0) \subset K$  ce qui nous donne une structure de  $\varphi^{-n}(K_0)$ -module sur  $K$  et sur  $D$  que l'on note alors  $\iota_n(D)$  et nous écrivons  $K \otimes_{K_0}^{\iota_n} D$  au lieu de  $K \otimes_{\varphi^{-n}(K_0)} \iota_n(D)$  pour alléger les notations; l'application  $\xi_n : K \otimes_{K_0} D \rightarrow K \otimes_{K_0}^{\iota_n} D$  qui envoie  $\mu \otimes x$  sur  $\mu \otimes \iota_n(\varphi^n(x))$  est un isomorphisme (rappelons que  $\iota_n = \varphi^{-n}$ ) que l'on utilise pour définir une filtration sur  $D_K^n = K \otimes_{K_0}^{\iota_n} D$ . On définit une filtration sur  $K_n((t))$  par la formule  $\text{Fil}^i K_n((t)) = t^i K_n[[t]]$  ce qui nous donne une filtration sur  $K_n((t)) \otimes_K D_K^n$ , et on pose  $M_n(D) = \text{Fil}^0(K_n((t)) \otimes_K D_K^n)$ . Le foncteur  $D \mapsto M_n(D)$  est alors un  $\otimes$ -foncteur exact.

**Proposition II.2.1.** — *La famille de réseaux  $\{M_n\}$  de  $K_n((t)) \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger, r}} \mathbf{D}_r$  définie par  $M_n(D) = \text{Fil}^0(K_n((t)) \otimes_K D_K^n)$  est  $\varphi$ -compatible.*

*Démonstration.* — Le  $K_n[[t]]$ -module  $M_n(D) = \text{Fil}^0(K_n((t)) \otimes_K D_K^n)$  est libre de rang  $d$ , engendré par une base de la forme  $t^{-h_i} \otimes \xi_n(e_i)$  où  $\{e_i\}_{1 \leq i \leq d}$  est une base de  $D_K$  adaptée à la filtration et  $h_i = t_H(e_i)$ , ce qui fait que  $M_{n+1}(D) = \varphi_n(K_{n+1}[[t]] \otimes_{K_n[[t]]} M_n(D))$  puisque  $\xi_{n+1} = \varphi_n \circ \xi_n$  sur  $D_K$ .  $\square$

**Définition II.2.2.** — Si  $D$  est un  $(\varphi, N)$ -module filtré relatif à  $K$ , soit  $\mathcal{M}(D)$  le  $(\varphi, \Gamma_K)$ -module fourni par le théorème II.1.2 à partir des réseaux  $M_n(D) = \text{Fil}^0(K_n((t)) \otimes_K D_K^n)$  de  $\mathbf{D} = (\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^\dagger[\ell_X] \otimes_F D)^{N=0}$ .

**Proposition II.2.3.** — Si  $D$  est un  $(\varphi, N, G_{L/K})$ -module filtré et  $D'$  est le  $(\varphi, N)$ -module filtré relatif à  $L$  qu'on en déduit (par oubli de l'action de  $G_{L/K}$ ), alors  $\mathcal{M}(D')$  est un  $(\varphi, \Gamma_L)$ -module sur  $\mathbf{B}_{\text{rig}, L}^{\dagger, r}$  muni d'une action de  $G_{L/K}$  (cf définition I.3.1).

*Démonstration.* — Vérification immédiate. □

**Définition II.2.4.** — Si  $D$  est un  $(\varphi, N, G_{L/K})$ -module filtré, alors on définit  $\mathcal{M}(D) = \mathcal{M}(D')^{H_K}$ .

Rappelons (cf [Fo94b, 4.3.2]) que par définition on a une filtration  $\text{Fil}^i D_L$  sur  $D_L = L \otimes_{L_0} D$  et que si  $\text{Fil}^i D_K$  est la filtration induite sur  $D_K = K \otimes_{K_0} D$ , alors  $\text{Fil}^i D_L = L \otimes_K \text{Fil}^i D_K$ . On a construit au début du paragraphe un isomorphisme  $G_{L/K}$ -équivariant  $D_L \rightarrow D_L^n$  que l'on utilise pour définir  $D_K^n = (D_L^n)^{G_{L/K}}$  ce qui fait que  $D_L^n = L \otimes_K D_K^n$ .

**Proposition II.2.5.** — Si  $D$  est un  $(\varphi, N, G_{L/K})$ -module filtré, et si on pose  $M_n(D_K) = \text{Fil}^0(K_n((t)) \otimes_K D_K^n)$ , alors  $K_n[[t]] \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger, r}}^{\iota_n} \mathcal{M}(D)_r = M_n(D_K)$  pour tout  $n \geq n(r)$ .

*Démonstration.* — Par construction,  $K_n[[t]] \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger, r}}^{\iota_n} \mathcal{M}(D)_r \subset \text{Fil}^0(L_n((t)) \otimes_L D_L^n)^{H_K}$ . Ce que l'on a rappelé ci-dessus montre que  $\text{Fil}^0(L_n((t)) \otimes_L D_L^n)^{H_K} = \text{Fil}^0(K_n((t)) \otimes_K D_K^n)$  et donc  $K_n[[t]] \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger, r}}^{\iota_n} \mathcal{M}(D)_r \subset M_n(D_K)$ .

Si  $x \in M_n(D_K)$ , alors  $x \in L_n[[t]] \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig}, L}^{\dagger, r}}^{\iota_n} \mathcal{M}(D')_r = L_n[[t]] \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger, r}}^{\iota_n} \mathcal{M}(D)_r$ . Finalement, comme  $x$  est fixé par  $H_K$ , on a  $x \in (L_n[[t]] \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger, r}}^{\iota_n} \mathcal{M}(D)_r)^{H_K} = K_n[[t]] \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger, r}}^{\iota_n} \mathcal{M}(D)_r$  ce qui montre que l'application  $K_n[[t]] \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger, r}}^{\iota_n} \mathcal{M}(D)_r \rightarrow M_n(D_K)$  est un isomorphisme. □

**Théorème II.2.6.** — Le foncteur  $D \mapsto \mathcal{M}(D)$  est un  $\otimes$ -foncteur exact de la catégorie des  $(\varphi, N, G_K)$ -modules filtrés dans la catégorie des  $(\varphi, \Gamma_K)$ -modules sur  $\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^\dagger$  et le rang de  $\mathcal{M}(D)$  est égal à la dimension de  $D$ .

*Démonstration.* — Si l'on a une suite exacte  $0 \rightarrow D_1 \rightarrow D_2 \rightarrow D_3 \rightarrow 0$ , alors montrons que  $\mathcal{M}(D_2) \rightarrow \mathcal{M}(D_3)$  est surjectif. Comme on l'a dit plus haut, les foncteurs  $D \mapsto M_n(D)$  sont des  $\otimes$ -foncteurs exacts. Comme  $M_n(D_2) \rightarrow M_n(D_3)$  est surjectif pour tout  $n$ , l'image  $\mathbf{M}$  de  $\mathcal{M}(D_2)$  dans  $\mathcal{M}(D_3)$  vérifie la condition que  $K_n[[t]] \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger, r}}^{\iota_n} \mathbf{M}_r = M_n(D_3)$  du théorème II.1.2 pour  $D = D_3$  et par unicité, on a donc que l'image de  $\mathcal{M}(D_2)$  dans  $\mathcal{M}(D_3)$  est  $\mathcal{M}(D_3)$ .

tout entier, ce qui fait que  $\mathcal{M}(D_2) \rightarrow \mathcal{M}(D_3)$  est bien surjectif. La vérification du fait que  $\mathcal{M}(D_1 \otimes D_2) = \mathcal{M}(D_1) \otimes \mathcal{M}(D_2)$  et celles des autres conditions sont similaires.  $\square$

Dans le chapitre suivant, nous allons déterminer l'image essentielle du foncteur  $D \mapsto \mathcal{M}(D)$  et montrer que ce foncteur est une équivalence de catégories sur son image essentielle.

### III. Construction de $(\varphi, N, G_K)$ -modules filtrés

L'objet de ce chapitre est de montrer comment on peut associer à certains  $(\varphi, \Gamma_K)$ -modules sur  $\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^\dagger$  un  $(\varphi, N, G_K)$ -module filtré. Cette construction est un inverse de celle du chapitre précédent.

**III.1. L'algèbre de Lie de  $\Gamma_K$ .** — Le groupe  $\Gamma_K$  s'identifie, via le caractère cyclotomique, à un sous-groupe ouvert de  $\mathbf{Z}_p^*$ , et c'est donc un groupe de Lie  $p$ -adique de dimension 1. Son algèbre de Lie :  $\text{Lie}(\Gamma_K)$  est un  $\mathbf{Q}_p$ -espace vectoriel de rang 1 dont une base est donnée par l'opérateur  $\log(\gamma)/\log_p \chi(\gamma)$  qui ne dépend pas du choix de  $\gamma \in \Gamma_K$ .

**Proposition III.1.1.** — *Si  $\mathbf{D}$  est un  $(\varphi, \Gamma_K)$ -module sur  $\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^\dagger$  alors l'algèbre de Lie de  $\Gamma_K$  agit par un opérateur différentiel  $\nabla_{\mathbf{D}} : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}$  qui commute à  $\varphi$  et à l'action de  $\Gamma_K$  et qui vérifie  $\nabla_{\mathbf{D}}(\lambda x) = \nabla(\lambda)x + \lambda \nabla_{\mathbf{D}}(x)$ .*

*Démonstration.* — La démonstration est semblable à celle de [Ber02, lemme 5.2] et du paragraphe qui la suit. Soit  $V_{[r; s]}$  la valuation sup sur la couronne  $C_K[r; s]$ . La topologie de  $\mathbf{D}_r$  est la topologie de Fréchet définie par l'ensemble  $\{V_{[r; s]}\}_{s \geq r}$ . Fixons  $s \geq r$  ; l'action de  $\Gamma_K$  sur  $\mathbf{D}_r$  est continue, et il existe donc un sous-groupe ouvert  $\Gamma_s \subset \Gamma_K$  tel que  $V_{[r; s]}((1 - \gamma)x) \geq V_{[r; s]}(x) + 1$  pour tout  $x \in \mathbf{D}_r$  et  $\gamma \in \Gamma_s$ . La série d'opérateurs

$$-\frac{1}{\log_p \chi(\gamma)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - \gamma)^n}{n}$$

converge alors vers un opérateur continu  $\nabla_{\mathbf{D}, s}$  de  $\mathbf{D}_r$  vers sa complétion pour  $V_{[r; s]}$ , qui ne dépend pas du choix de  $\gamma \in \Gamma_s$ . Ces opérateurs  $\nabla_{\mathbf{D}, s}$  se recollent en un opérateur  $\nabla_{\mathbf{D}} : \mathbf{D}_r \rightarrow \mathbf{D}_r$  qui est continu pour la topologie de Fréchet.

Enfin le fait que  $\nabla_{\mathbf{D}}(\lambda x) = \nabla(\lambda)x + \lambda \nabla_{\mathbf{D}}(x)$  résulte par passage à la limite du fait que

$$(1 - \gamma)(\lambda \cdot x) = (1 - \gamma)(\lambda) \cdot x + \lambda \cdot (1 - \gamma)(x) - (1 - \gamma)(\lambda) \cdot (1 - \gamma)(x).$$

$\square$

**Définition III.1.2.** — On dit que l'opérateur  $\nabla_{\mathbf{D}}$  est localement trivial sur un  $(\varphi, \Gamma_K)$ -module  $\mathbf{D}$  s'il existe  $r$  tel que

$$K_{n(r)}((t)) \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger, r}}^{\iota_{n(r)}} \mathbf{D}_r = K_{n(r)}((t)) \otimes_{K_{n(r)}} \left( K_{n(r)}((t)) \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger, r}}^{\iota_{n(r)}} \mathbf{D}_r \right)^{\nabla_{\mathbf{D}}=0}.$$

Avant de continuer, faisons quelques rappels sur les modules à connexion. Soit  $E$  un corps de caractéristique 0, et  $M$  un  $E((t))$ -espace vectoriel de dimension finie  $d$  muni d'une connexion  $\nabla_M : M \rightarrow M$  qui étend  $\nabla : f(t) \mapsto t \cdot df/dt$ . Une section horizontale de  $M$  est un élément de  $M^{\nabla_M=0}$  et un argument classique montre que  $\dim_E M^{\nabla_M=0} \leq d$ .

On dit que la connexion  $\nabla_M$  est régulière si  $M$  possède un  $E[[t]]$ -réseau  $M_0$  tel que  $\nabla_M(M_0) \subset M_0$  et on dit que la connexion  $\nabla_M$  est triviale si  $M$  possède un  $E[[t]]$ -réseau  $M_0$  tel que  $\nabla_M(M_0) \subset tM_0$ . Un argument d'approximations successives montre que dans ce cas,  $M_0^{\nabla_M=0}$  est un  $E$ -espace vectoriel de dimension  $d$  et que  $M_0 = E[[t]] \otimes_E M_0^{\nabla_M=0}$ . On voit donc que la connexion  $\nabla_M$  est triviale si et seulement si  $\dim_E M^{\nabla_M=0} = d$ , et que dans ce cas  $M_0 = E[[t]] \otimes_E M^{\nabla_M=0}$  est l'unique  $E[[t]]$ -réseau de  $M$  tel que  $\nabla_M(M_0) \subset tM_0$ .

**Lemme III.1.3.** — Si  $N$  est un sous- $E((t))$ -espace vectoriel de  $M$  stable par la connexion  $\nabla_M$ , et si  $\nabla_M$  est triviale sur  $M$ , alors elle est aussi triviale sur  $N$ .

*Démonstration.* — Si  $M_0$  est un  $E[[t]]$ -réseau de  $M$  tel que  $\nabla_M(M_0) \subset tM_0$ , alors  $M_0 \cap N$  est un  $E[[t]]$ -réseau de  $N$  et  $\nabla_M(M_0 \cap N) \subset t(M_0 \cap N)$  ce qui fait que la connexion  $\nabla_M$  est triviale sur  $N$ .  $\square$

La terminologie de la définition III.1.2 est compatible avec ce que l'on vient de rappeler :  $\nabla_{\mathbf{D}}$  est localement triviale si et seulement si  $\nabla_{\mathbf{D}}$  est triviale sur le  $K_{n(r)}((t))$ -module à connexion  $K_{n(r)}((t)) \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger, r}}^{\iota_{n(r)}} \mathbf{D}_r$ . En particulier, si  $\nabla_{\mathbf{D}}$  est localement triviale sur  $\mathbf{D}$  et si  $\mathbf{D}'$  est un sous-objet de  $\mathbf{D}$ , alors  $\nabla_{\mathbf{D}}$  est localement triviale sur  $\mathbf{D}'$ .

**Lemme III.1.4.** — Si  $\nabla_{\mathbf{D}}$  est localement triviale sur  $\mathbf{D}$ , alors,  $\nabla_{\mathbf{D}}$  est triviale sur  $K_n((t)) \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger, r}}^{\iota_n} \mathbf{D}_r$  pour tout  $n \geq n(r)$ .

Dans ce cas, si  $D_n$  est le réseau de  $K_n((t)) \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger, r}}^{\iota_n} \mathbf{D}_r$  tel que  $\nabla_{\mathbf{D}}(D_n) \subset tD_n$ , alors  $D_{n+1} = \varphi_n(K_{n+1}[[t]] \otimes_{K_n[[t]]} D_n)$ .

*Démonstration.* — Si  $D_n = K_n[[t]] \otimes_{K_n} (K_n((t)) \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger, r}}^{\iota_n} \mathbf{D}_r)^{\nabla_{\mathbf{D}}=0}$ , alors par hypothèse,  $\nabla_{\mathbf{D}}(D_{n(r)}) \subset tD_{n(r)}$  et si  $n \geq n(r)$  et  $\nabla_{\mathbf{D}}(D_n) \subset tD_n$  alors  $\nabla_{\mathbf{D}}(D_{n+1}) \subset tD_{n+1}$  si  $D_{n+1}$  est le réseau de  $K_{n+1}((t)) \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger, r}}^{\iota_{n+1}} \mathbf{D}_r$  donné par  $D_{n+1} = \varphi_n(K_{n+1}[[t]] \otimes_{K_n[[t]]} D_n)$  puisque  $\nabla_{\mathbf{D}}$  commute à  $\varphi_n$ , ce qui montre le résultat par récurrence.  $\square$

**Proposition III.1.5.** — *Si  $D$  est un  $(\varphi, N, G_{L/K})$ -module filtré, alors  $\nabla_{\mathbf{D}}$  est localement triviale sur  $\mathcal{M}(D)$ .*

*Démonstration.* — Par la proposition II.2.5, on a  $K_n((t)) \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}}^{\iota_n} \mathcal{M}(D)_r = K_n((t)) \otimes_K D_K^n$  et comme  $G_{L/K}$  est fini,  $\nabla_{\mathbf{D}} = 0$  sur  $D_K^n$ .  $\square$

Cette proposition montre que si  $\mathbf{M}$  est dans l'image du foncteur  $D \mapsto \mathcal{M}(D)$ , alors  $\nabla_{\mathbf{M}}$  est localement triviale sur  $\mathbf{M}$ . Nous allons voir que réciproquement, si  $\nabla_{\mathbf{M}}$  est localement triviale sur  $\mathbf{M}$ , alors  $\mathbf{M}$  est dans l'image du foncteur  $D \mapsto \mathcal{M}(D)$ .

**III.2. Équations différentielles  $p$ -adiques.** — Dans ce paragraphe, nous déterminons l'image essentielle du foncteur  $D \mapsto \mathcal{M}(D)$ . Si  $\mathbf{D}$  est un  $\varphi$ -module sur  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger}$  muni d'un opérateur différentiel  $\partial_{\mathbf{D}}$  qui étend l'opérateur  $\partial : f \mapsto (1+X)df/dX$  et tel que  $\partial_{\mathbf{D}} \circ \varphi = p \cdot \varphi \circ \partial_{\mathbf{D}}$ , alors on dit que  $\mathbf{D}$  est une équation différentielle  $p$ -adique avec structure de Frobenius.

Si  $\mathbf{D}$  est un  $(\varphi, \Gamma_K)$ -module sur  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger}$  et si  $\mathbf{D}$  est stable par l'opérateur  $\partial_{\mathbf{D}} = t^{-1}\nabla_{\mathbf{D}}$ , alors  $\mathbf{D}$  est une équation différentielle  $p$ -adique avec structure de Frobenius.

Rappelons tout d'abord le théorème de monodromie  $p$ -adique, conjecturé par Crew et démontré par André, Kedlaya et Mebkhout (cf [And02], [Ked04] et [Meb02] ainsi que le séminaire Bourbaki [Col01]) :

**Théorème III.2.1.** — *Si  $\mathbf{D}$  est une équation différentielle  $p$ -adique avec structure de Frobenius, alors il existe une extension finie  $L/K$  telle que l'application naturelle*

$$\mathbf{B}_{\text{rig},L}^{\dagger}[\ell_X] \otimes_{L'_0} \left( \mathbf{B}_{\text{rig},L}^{\dagger}[\ell_X] \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger}} \mathbf{D} \right)^{\partial_D=0} \rightarrow \mathbf{B}_{\text{rig},L}^{\dagger}[\ell_X] \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger}} \mathbf{D}$$

*est un isomorphisme.*

Supposons maintenant que  $\mathbf{D}$  est un  $(\varphi, \Gamma_K)$ -module sur  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger}$  qui est stable par l'opérateur  $\partial_{\mathbf{D}} = t^{-1}\nabla_{\mathbf{D}}$  et posons  $S_L(\mathbf{D}) = (\mathbf{B}_{\text{rig},L}^{\dagger}[\ell_X] \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger}} \mathbf{D})^{\partial_D=0}$ . C'est un  $L'_0$ -espace vectoriel qui hérite d'une action résiduelle de  $\Gamma_K$  triviale sur un sous-groupe ouvert (puisque  $t\partial_D = 0$ ). Quitte à remplacer  $L$  par une extension finie, on peut donc supposer que  $\Gamma_L$  agit trivialement sur  $S_L(\mathbf{D})$ , ce qui fait que  $L'_0 = L_0$  et on pose alors  $\text{Sol}_L(\mathbf{D}) = S_L(\mathbf{D})$  ce qui fait que

$$\text{Sol}_L(\mathbf{D}) = \left( \mathbf{B}_{\text{rig},L}^{\dagger}[\ell_X] \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger}} \mathbf{D} \right)^{G_L}$$

est un  $(\varphi, N, G_{L/K})$ -module tel que

$$\mathbf{B}_{\text{rig},L}^{\dagger}[\ell_X] \otimes_{L_0} \text{Sol}_L(\mathbf{D}) = \mathbf{B}_{\text{rig},L}^{\dagger}[\ell_X] \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger}} \mathbf{D}.$$

**Définition III.2.2.** — Le  $L_0$ -espace vectoriel  $\mathrm{Sol}_L(\mathbf{D})$  est alors appelé l'espace des  $G_L$ -solutions du  $(\varphi, \Gamma_K)$ -module  $\mathbf{D}$ .

On peut donc reformuler le théorème III.2.1 ci-dessus et la discussion qui suit en disant que si  $\mathbf{D}$  est un  $(\varphi, \Gamma_K)$ -module sur  $\mathbf{B}_{\mathrm{rig}, K}^\dagger$  qui est stable par l'opérateur  $\partial_{\mathbf{D}} = t^{-1}\nabla_{\mathbf{D}}$ , alors il admet des  $G_L$ -solutions pour  $L$  assez grand.

**Théorème III.2.3.** — Si  $\mathbf{M}$  est un  $(\varphi, \Gamma_K)$ -module sur  $\mathbf{B}_{\mathrm{rig}, K}^\dagger$  tel que  $\nabla_{\mathbf{M}}$  est localement triviale, alors il existe un unique  $(\varphi, \Gamma_K)$ -module  $\mathbf{D} \subset \mathbf{M}[1/t]$  tel que  $\mathbf{D}[1/t] = \mathbf{M}[1/t]$  et tel que  $\partial_{\mathbf{M}}(\mathbf{D}) \subset \mathbf{D}$ .

De plus, la donnée de  $\mathbf{M}$  détermine une filtration sur  $L \otimes_{L_0} \mathrm{Sol}_L(\mathbf{D})$  et donc une structure de  $(\varphi, N, G_{L/K})$ -module filtré sur  $\mathrm{Sol}_L(\mathbf{D})$  qui a la propriété que  $\mathbf{M} = \mathcal{M}(\mathrm{Sol}_L(\mathbf{D}))$ .

*Démonstration.* — Comme  $\nabla_{\mathbf{M}}$  est localement triviale, il existe une famille de réseaux  $D_n$  de  $K_n((t)) \otimes_{\mathbf{B}_{\mathrm{rig}, K}^\dagger, r}^{\iota_n} \mathbf{M}_r$  tels que  $\nabla_{\mathbf{D}}(D_n) \subset tD_n$  et comme  $D_{n+1} = \varphi_n(K_{n+1}[[t]] \otimes_{K_n[[t]]} D_n)$  par le lemme III.1.4, la famille  $\{D_n\}$  est  $\varphi$ -compatible. Par le théorème II.1.2, il existe donc un  $(\varphi, \Gamma_K)$ -module  $\mathbf{D}$  tel que  $K_n[[t]] \otimes_{\mathbf{B}_{\mathrm{rig}, K}^\dagger, r}^{\iota_n} \mathbf{D}_r = D_n$ . Comme  $\nabla_{\mathbf{D}}(D_n) \subset tD_n$  pour tout  $n$ , on a  $\nabla_{\mathbf{D}}(\mathbf{D}) \subset t\mathbf{D}$  ce qui fait que  $\mathbf{D}$  muni de la connexion  $\partial_{\mathbf{D}} = t^{-1}\nabla_{\mathbf{D}}$  est une équation différentielle  $p$ -adique avec structure de Frobenius ce qui montre le premier point. L'unicité de  $\mathbf{D}$  suit du fait que l'on a nécessairement  $K_n[[t]] \otimes_{\mathbf{B}_{\mathrm{rig}, K}^\dagger, r}^{\iota_n} \mathbf{D}_r = D_n$  pour tout  $n \geq n(r)$ .

Par le théorème de monodromie  $p$ -adique de André, Kedlaya et Mebkhout que l'on a rappelé ci-dessus en III.2.1, et la discussion qui le suit, le  $(\varphi, \Gamma_K)$ -module  $\mathbf{D}$  admet des  $G_L$ -solutions pour  $L/K$  assez grand. Posons  $D = \mathrm{Sol}_L(\mathbf{D})$  pour alléger les notations ; nous allons construire une filtration sur  $D_L = L \otimes_{L_0} D$  à la manière de [Col01, proposition 5.6].

On a des isomorphismes

$$L_n((t)) \otimes_L D_L^n = L_n((t)) \otimes_{\mathbf{B}_{\mathrm{rig}, K}^\dagger, r}^{\iota_n} \mathbf{D}_r \simeq L_n((t)) \otimes_{\mathbf{B}_{\mathrm{rig}, K}^\dagger, r}^{\iota_n} \mathbf{M}_r$$

que l'on utilise pour définir  $\mathrm{Fil}^i D_L^n = D_L^n \cap t^i L_n[[t]] \otimes_{\mathbf{B}_{\mathrm{rig}, K}^\dagger, r}^{\iota_n} \mathbf{M}_r$  et l'isomorphisme  $D_L \rightarrow D_L^n$  permet de définir  $\mathrm{Fil}^i D_L$ . Par définition, l'isomorphisme  $D_L \rightarrow D_L^n$  est donné par  $\mu \otimes x \mapsto \mu \otimes \iota_n(\varphi^n(x))$  et donc l'isomorphisme  $D_L \rightarrow D_L^{n+1}$  coïncide avec la composition  $D_L \rightarrow D_L^n \xrightarrow{\varphi^n} D_L^{n+1}$  ce qui fait que la filtration induite sur  $D_L$  ne dépend pas de  $n$ .

Enfin, on a  $K_n[[t]] \otimes_{\mathbf{B}_{\mathrm{rig}, K}^\dagger, r}^{\iota_n} \mathbf{M}_r = \mathrm{Fil}^0(K_n((t)) \otimes_K D_K^n)$  ce qui fait que  $\mathbf{M} = \mathcal{M}(D) = \mathcal{M}(\mathrm{Sol}_L(\mathbf{D}))$ .  $\square$

En rassemblant les théorèmes II.2.6 et III.2.3, on trouve :



**Théorème III.2.4.** — *Le  $\otimes$ -foncteur exact  $D \mapsto \mathcal{M}(D)$ , de la catégorie des  $(\varphi, N, G_K)$ -modules filtrés, dans la catégorie des  $(\varphi, \Gamma_K)$ -modules sur  $\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^\dagger$  dont la connexion associée est localement triviale, est une équivalence de catégories.*

En particulier, on a le résultat suivant qui nous servira dans la suite :

**Corollaire III.2.5.** — *Si  $D$  est un  $(\varphi, N, G_{L/K})$ -module filtré, et si  $\mathbf{M}'$  est un sous- $(\varphi, \Gamma_K)$ -module de  $\mathbf{M} = \mathcal{M}(D)$ , alors il existe un sous-objet  $D' \subset D$  tel que  $\mathbf{M}' = \mathcal{M}(D')$ .*

*Démonstration.* — Par le lemme III.1.3 et la remarque qui le suit, la connexion  $\nabla_{\mathbf{M}}$  est localement triviale sur  $\mathbf{M}'$  et on peut donc écrire  $\mathbf{M}' = \mathcal{M}(D')$  pour un  $(\varphi, N, G_{M/K})$ -module filtré où  $M/K$  est une extension suffisamment grande. L'inclusion  $\mathbf{M}' \subset \mathbf{M}$  nous donne par fonctorialité une inclusion de  $(\varphi, N, G_{M/K})$ -modules filtrés  $D' \subset D$ , ce qui fait que  $G_{M/L}$  agit trivialement sur  $D'$  et donc que  $D'$  est un sous- $(\varphi, N, G_{L/K})$ -module filtré de  $D$ .  $\square$

## IV. Pentas de Frobenius

Nous calculons dans ce paragraphe les pentas de Frobenius des  $(\varphi, \Gamma_K)$ -modules  $\mathcal{M}(D)$  associés aux  $(\varphi, N, G_K)$ -modules filtrés  $D$ . En particulier, on montre que  $D$  est admissible si et seulement si  $\mathcal{M}(D)$  est étale.

**IV.1. Rappels sur les pentas de Frobenius.** — Rappelons le théorème principal (le théorème 6.10) de [Ked04]. Pour cela, il convient de noter que les anneaux  $\Gamma_{\text{an}, \text{con}}$  et  $\Gamma_{\text{con}}[1/p]$  de Kedlaya sont nos anneaux  $\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^\dagger$  et  $\mathbf{B}_K^\dagger$ .

**Théorème IV.1.1.** — *Si  $\mathbf{M}$  est un  $\varphi$ -module sur  $\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^\dagger$ , alors  $\mathbf{M}$  admet une filtration canonique  $\{0\} = \mathbf{M}_0 \subset \mathbf{M}_1 \subset \dots \subset \mathbf{M}_\ell = \mathbf{M}$  par des sous  $\varphi$ -modules telle que :*

- (1) *pour  $i = 1, \dots, \ell$ , le quotient  $\mathbf{M}_i/\mathbf{M}_{i-1}$  est isocline de pente spéciale  $s_i$  ;*
- (2)  *$s_1 < s_2 < \dots < s_\ell$  ;*
- (3) *chaque quotient  $\mathbf{M}_i/\mathbf{M}_{i-1}$  peut s'écrire  $\mathbf{M}_i/\mathbf{M}_{i-1} = \mathbf{B}_{\text{rig}, K}^\dagger \otimes_{\mathbf{B}_K^\dagger} \mathbf{N}_i$  où  $\mathbf{N}_i$  est un  $\varphi$ -module sur  $\mathbf{B}_K^\dagger$  isocline de pente générique  $s_i$ .*

*De plus, les conditions (1) et (2) ci-dessus déterminent la filtration, et les  $\mathbf{N}_i$  du (3) sont aussi uniques.*

Nous ne rappelons pas ce que sont les pentas spéciales et génériques, mais signalons que si  $\mathbf{M}$  est de rang 1 alors les pentas spéciales et génériques coïncident, et si de plus on a  $\mathbf{M} = \mathbf{B}_{\text{rig}, K}^\dagger \cdot x$  où  $\varphi(x) = \lambda x$  avec  $\lambda \in \mathcal{O}_{K'}^\times$ , alors cette pente est égale à  $v_p(\lambda)$ .

Si  $\mathbf{M}$  est un  $(\varphi, \Gamma_K)$ -module, alors, comme l'action de  $\Gamma_K$  commute à  $\varphi$ , les  $\mathbf{M}_i$  sont stables par  $\Gamma_K$  puisque la filtration est canonique et les  $\mathbf{N}_i$  sont aussi stables par  $\Gamma_K$  par unicité.

**Définition IV.1.2.** — On dit qu'un  $\varphi$ -module  $\mathbf{M}$  sur  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger$  est étale si dans le théorème IV.1.1 ci-dessus,  $\ell = 1$  et  $s_1 = 0$ , c'est-à-dire s'il existe un  $(\varphi, \Gamma_K)$ -module étale (i.e. de pente générique nulle)  $\mathbf{M}^\dagger$  sur  $\mathbf{B}_K^\dagger$  tel que  $\mathbf{M} = \mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger \otimes_{\mathbf{B}_K^\dagger} \mathbf{M}^\dagger$ .

**Proposition IV.1.3.** — Si  $\mathbf{M}$  est un  $\varphi$ -module, dont les pentes  $s_1 < s_2 < \dots < s_\ell$  sont  $\geq 0$ , et  $x \in \mathbf{M}$  est tel que  $\varphi(x) = \lambda x$  avec  $\lambda \in K'_0$ , alors  $\lambda \in \mathcal{O}_{K'_0}$ .

*Démonstration.* — Le vecteur  $x$  est un vecteur propre de Frobenius. La démonstration de [Ked04, theorem 6.10] montre que  $\mathbf{M}_1 \subset \mathbf{M}$  est de pente égale à la plus petite pente spéciale de  $\mathbf{M}$ . Les pentes spéciales de  $\mathbf{M}$  sont définies à partir des vecteurs propres de Frobenius (cf [Ked04, §4.4]) ce qui fait que si  $s_1 \geq 0$ , alors  $v_p(\lambda) \geq 0$ .  $\square$

**IV.2. Calcul des pentes de  $\mathcal{M}(D)$ .** — Le résultat principal de ce chapitre est le théorème ci-dessous :

**Théorème IV.2.1.** — Si  $D$  est un  $(\varphi, N, G_{L/K})$ -module filtré, alors la pente de  $\det \mathcal{M}(D)$  est égale à  $t_N(D) - t_H(D)$ .

*Démonstration.* — Comme le foncteur  $D \mapsto \mathcal{M}(D)$  est un  $\otimes$ -foncteur exact, on a  $\det \mathcal{M}(D) = \mathcal{M}(\det D)$  et d'autre part on a par définition  $t_N(D) = t_N(\det D)$  et  $t_H(D) = t_H(\det D)$  ce qui fait qu'il suffit de montrer le théorème quand  $D$  est de rang 1. Si  $e$  est une base de  $D$  telle que  $\varphi(e) = p^\nu \lambda_0 e$  où  $\lambda_0 \in \mathcal{O}_{K_0}^*$  et  $t_H(e) = \eta$ , alors on voit que  $\mathcal{M}(D) = \mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger t^{-\eta} \otimes e$  et que  $\varphi(t^{-\eta} \otimes e) = p^{\nu-\eta} \lambda_0 \cdot t^{-\eta} \otimes e$  ce qui fait que la pente de  $\mathcal{M}(D)$  est égale à  $\nu - \eta$  et vaut bien  $t_N(D) - t_H(D)$ .  $\square$

**Proposition IV.2.2.** — Si  $D$  est un  $(\varphi, N, G_{L/K})$ -module filtré, alors  $D$  est admissible si et seulement si  $\mathcal{M}(D)$  est un  $(\varphi, \Gamma_K)$ -module étale.

*Démonstration.* — Supposons tout d'abord que  $D$  est admissible. Le théorème [Ked04, theorem 6.10] de Kedlaya rappelé ci-dessus montre que  $\mathcal{M}(D)$  admet une filtration canonique par des sous  $(\varphi, \Gamma_K)$ -modules isoclines de pentes croissantes. La somme de ces pentes (comptées avec multiplicités) est la pente de  $\det \mathcal{M}(D)$  (cf [Ked04, prop 5.13]) et vaut donc  $t_N(D) - t_H(D) = 0$ . Pour montrer que  $\mathcal{M}(D)$  est isocline de pente nulle, il suffit donc de montrer que les pentes de  $\mathcal{M}(D)$  sont  $\geq 0$ . Par le corollaire III.2.5, tout sous-objet de  $\mathcal{M}(D)$  est de la forme  $\mathcal{M}(D')$  où  $D' \subset D$  et la pente de  $\det \mathcal{M}(D')$  vaut  $t_N(D') - t_H(D') \geq 0$  puisque  $D$

est supposé admissible. On en conclut que  $\mathcal{M}(D)$  ne peut pas contenir de sous-objet isocline de pente  $< 0$  et donc que  $\mathcal{M}(D)$  est étale.

Montrons maintenant que si  $\mathcal{M}(D)$  est étale, alors  $D$  est admissible. La pente de  $\det \mathcal{M}(D)$  est nulle et donc  $t_N(D) - t_H(D) = 0$ . Si  $D'$  est un sous-objet de  $D$ , de dimension  $d'$ , alors  $\det(D')$  est de dimension 1 dans  $\wedge^{d'} D$  et  $\mathcal{M}(\det D')$  est un sous- $\varphi$ -module de rang 1 de  $\mathcal{M}(\wedge^{d'} D)$ . Par la proposition IV.1.3, la pente de  $\mathcal{M}(\det D')$  est  $\geq 0$  ce qui fait que  $t_N(D') - t_H(D') \geq 0$ . On en conclut que  $D'$  est admissible.  $\square$

**Remarque IV.2.3.** — Comme on le verra au chapitre V, la proposition IV.2.2 ci-dessus permet de redémontrer le théorème d'admissibilité de Colmez-Fontaine en utilisant la correspondance entre représentations  $p$ -adiques et  $(\varphi, \Gamma_K)$ -modules étales.

Le théorème suivant est une conséquence immédiate de la proposition IV.2.2 ci-dessus.

**Théorème IV.2.4.** — *Le  $\otimes$ -foncteur exact  $D \mapsto \mathcal{M}(D)$ , de la catégorie des  $(\varphi, N, G_K)$ -modules filtrés admissibles, dans la catégorie des  $(\varphi, \Gamma_K)$ -modules étales sur  $\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^\dagger$  dont la connexion associée est localement triviale, est une équivalence de catégories.*

**Remarque IV.2.5.** — Ce théorème permet notamment de retrouver le théorème de Faltings-Totaro qui affirme que la catégorie des  $(\varphi, N, G_K)$ -modules filtrés admissibles est stable par produits tensoriels.

**Remarque IV.2.6.** — En général, on peut se demander comment calculer les pentes de  $\mathcal{M}(D)$ . Posons  $\mu(D) = (t_N(D) - t_H(D)) / \dim D$ . Si  $D$  est irréductible, alors  $\mathcal{M}(D)$  est aussi irréductible et le théorème IV.2.1 montre que  $\mathcal{M}(D)$  est isocline de pente  $\mu(D)$ . Cela suggère un procédé pour calculer les pentes de  $\mathcal{M}(D)$  en général : parmi tous les sous-objets irréductibles  $D' \subset D$ , en choisir un  $D_{\min}$  qui minimise  $\mu(D')$ . Les pentes de  $\mathcal{M}(D)$  sont alors :  $\mu(D_{\min})$  et les pentes de  $D/D_{\min}$ .

**Remarque IV.2.7.** — Si  $D$  est un  $(\varphi, N)$ -module filtré admissible, alors  $\mathcal{M}(D)$  peut très bien contenir des sous-objets de pente  $> 0$ . Ceci n'est pas en contradiction avec le théorème de Kedlaya, car c'est la filtration par des pentes croissantes qui est canonique.

**Exemple IV.2.8.** — Voici quelques exemples de calcul de  $\mathcal{M}(D)$  pour des  $\varphi$ -modules filtrés  $D$  relatifs à  $\mathbf{Q}_p$ . Dans tous les cas,  $D = \mathbf{Q}_p e \oplus \mathbf{Q}_p f$ .

(1)  $\varphi(e) = e$ ,  $\varphi(f) = pf$ ,  $\text{Fil}^0 D = D$ ,  $\text{Fil}^1 D = \mathbf{Q}_p(e + f)$  et  $\text{Fil}^2 D = \{0\}$ . Ce  $D$  est admissible. Une base de  $\mathcal{M}(D)$  est donnée par  $e$  et  $\alpha e + f$  où  $\alpha$  est une fonction telle que

$\alpha(\zeta_{p^n} - 1) = p^{-n}$  pour  $n \gg 0$ . Il y a deux sous- $\varphi$ -modules dans  $\mathcal{M}(D)$  : celui engendré par  $e$  est de pente 0 et celui engendré par  $f$  est de pente 1.

(2)  $\varphi(e) = e$ ,  $\varphi(f) = pf$ ,  $\text{Fil}^0 D = D$ ,  $\text{Fil}^1 D = \mathbf{Q}_p e$  et  $\text{Fil}^2 D = \{0\}$ . Ce  $D$  n'est pas admissible. Une base de  $\mathcal{M}(D)$  est donnée par  $t^{-1}e$  et  $f$ . Il y a deux sous- $\varphi$ -modules dans  $\mathcal{M}(D)$  : celui engendré par  $t^{-1}e$  est de pente  $-1$  et celui engendré par  $f$  est de pente 1.

(3)  $\varphi(e) = p^2 f$ ,  $\varphi(f) = e$ ,  $\text{Fil}^0 D = D$ ,  $\text{Fil}^{1,2} D = \mathbf{Q}_p e$  et  $\text{Fil}^3 D = \{0\}$ . Ce  $D$  est admissible. Une base de  $\mathcal{M}(D)$  est donnée par  $e/t_+^2$  et  $f/t_-^2$  où les fonctions

$$t_+(X) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1+X)^{p^{2n}} - 1}{p((1+X)^{p^{2n-1}} - 1)} \quad \text{et} \quad t_-(X) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1+X)^{p^{2n-1}} - 1}{p((1+X)^{p^{2n-2}} - 1)}$$

sont les produits partiels pairs et impairs de  $t = \log(1+X)$ . Il y a deux sous- $\varphi$ -modules dans  $\mathcal{M}(D)$ , engendrés par  $e \pm pf$ , qui sont tous les deux de pente 1.

## V. Applications aux représentations $p$ -adiques

L'objet de ce chapitre est de donner des applications des constructions ci-dessus aux représentations  $p$ -adiques. Dans tout ce chapitre, une représentation  $p$ -adique de  $G_K$  est un  $\mathbf{Q}_p$ -espace vectoriel de dimension finie muni d'une action linéaire et continue de  $G_K$ .

**V.1. Anneaux de Fontaine et représentations  $p$ -adiques.** — Dans ce paragraphe, nous donnons de brefs rappels sur certains aspects de la théorie des représentations  $p$ -adiques. Afin d'étudier les représentations  $p$ -adiques, on construit un certains nombres d'anneaux de périodes, et nous avons besoin des anneaux  $\mathbf{B}_{\text{st}}$  et  $\mathbf{B}_{\text{dR}}$  définis dans [Fo94a] et de l'anneau  $\mathbf{B}^\dagger$  défini dans [CC98]. L'anneau  $\mathbf{B}_{\text{st}}$  est une  $\mathbf{Q}_p$ -algèbre qui est aussi un  $(\varphi, N, G_K)$ -module (mais  $\mathbf{B}_{\text{st}}$  est de dimension infinie et  $G_K$  n'agit pas à travers un quotient fini cette fois) et  $\mathbf{B}_{\text{dR}}$  est un corps qui est aussi une  $\mathbf{Q}_p$ -algèbre filtrée. On a de plus une injection  $K \otimes_{K_0} \mathbf{B}_{\text{st}} \rightarrow \mathbf{B}_{\text{dR}}$  ce qui fait que l'on peut voir  $\mathbf{B}_{\text{st}}$  comme une sorte de  $(\varphi, N, G_K)$ -module filtré.

Étant donnée une représentation  $p$ -adique  $V$  de  $G_K$ , le  $K_0$ -espace vectoriel  $(\mathbf{B}_{\text{st}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K}$  est de dimension  $\leq \dim(V)$  et on dit que  $V$  est semi-stable si sa dimension est  $= \dim(V)$ . Si  $V$  n'est pas semi-stable mais le devient quand on la restreint à un sous-groupe ouvert  $G_L$  de  $G_K$ , alors  $\mathbf{D}_{\text{st},L}(V) = (\mathbf{B}_{\text{st}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_L}$  est un  $(\varphi, N, G_{L/K})$ -module filtré admissible. En fait,  $L \otimes_{L_0} \mathbf{D}_{\text{st},L}(V)$  s'identifie naturellement à  $L \otimes_K \mathbf{D}_{\text{dR}}(V)$  où  $\mathbf{D}_{\text{dR}}(V) = (\mathbf{B}_{\text{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K}$ .

Plus généralement, on dit qu'une représentation  $p$ -adique  $V$  est de de Rham si le  $K$ -espace vectoriel  $(\mathbf{B}_{\text{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K}$  est de dimension  $\dim(V)$  et la construction précédente montre que les représentations potentiellement semi-stables sont de de Rham. La réciproque est aussi vraie, ainsi que Fontaine l'avait conjecturé dans [Fo94b, §6.2] (c'est la conjecture

de monodromie pour les représentations  $p$ -adiques. Voir le « séminaire Bourbaki » [Col01] pour des détails sur cette conjecture ; la démonstration du fait que la conjecture de Crew (la conjecture de monodromie pour les équations différentielles  $p$ -adiques) implique la conjecture de monodromie pour les représentations  $p$ -adiques se trouve dans [Ber02] et la conjecture de Crew est démontrée dans [And02, Ked04, Meb02]. Des démonstrations « directes » de la conjecture de monodromie pour les représentations  $p$ -adiques se trouvent dans [Col03, Fon04]).

Dans une autre direction, le corps  $\mathbf{B}^\dagger$  est muni d'un Frobenius  $\varphi$  et d'une action de  $G_K$  telle que  $(\mathbf{B}^\dagger)^{H_K} = \mathbf{B}_K^\dagger$ . Si  $\mathbf{D}^\dagger$  est un  $(\varphi, \Gamma_K)$ -module étale et de dimension  $d$  sur  $\mathbf{B}_K^\dagger$ , alors on peut montrer que  $V(\mathbf{D}^\dagger) = (\mathbf{B}^\dagger \otimes_{\mathbf{B}_K^\dagger} \mathbf{D}^\dagger)^{\varphi=1}$  est un  $\mathbf{Q}_p$ -espace vectoriel de dimension  $d$  qui hérite d'une action de  $G_K$ . Si on combine les résultats de Fontaine (cf [Fon90]) et le théorème de Cherbonnier-Colmez (cf [CC98]), on trouve que le foncteur  $\mathbf{D}^\dagger \rightarrow V(\mathbf{D}^\dagger)$  est une équivalence de catégories de la catégorie des  $(\varphi, \Gamma_K)$ -modules étales sur  $\mathbf{B}_K^\dagger$  vers la catégorie des représentations  $p$ -adiques de  $G_K$  ; on note  $V \mapsto \mathbf{D}^\dagger(V)$  l'inverse de ce foncteur.

Si  $V$  est de de Rham, alors on peut montrer (cf [Fon00, proposition 3.25]) que la connexion  $\nabla_{\mathbf{D}}$  sur  $\mathbf{D}_{\text{rig}}^\dagger(V) = \mathbf{B}_{\text{rig}, K}^\dagger \otimes_{\mathbf{B}_K^\dagger} \mathbf{D}^\dagger(V)$  est localement triviale, et le théorème III.2.3 (qui dans ce cas est aussi donné dans [Ber02, théorème 5.10]) montre qu'il existe alors un unique  $(\varphi, \Gamma_K)$ -module  $\mathbf{N}_{\text{dR}}(V)$  de rang  $\dim(V)$  contenu dans  $\mathbf{D}_{\text{rig}}^\dagger(V)$  et tel que  $\nabla_{\mathbf{D}}(\mathbf{N}_{\text{dR}}(V)) \subset t\mathbf{N}_{\text{dR}}(V)$ . Cette construction est d'ailleurs le point de départ d'une démonstration du théorème de monodromie pour les représentations  $p$ -adiques.

**V.2. Représentations potentiellement semi-stables.** — Si  $V$  est une représentation  $p$ -adique de  $G_K$  qui devient semi-stable quand on la restreint à  $G_L$  pour une extension galoisienne finie  $L/K$ , alors  $\mathbf{D}_{\text{st}, L}(V) = (\mathbf{B}_{\text{st}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_L}$  est un  $(\varphi, N, G_{L/K})$ -module filtré admissible. L'objet de ce paragraphe est de montrer comment on peut utiliser le théorème IV.2.4 pour donner une nouvelle démonstration du théorème de Colmez-Fontaine (cf [CF00, théorème A]) rappelé ci-dessous :

**Théorème V.2.1.** — *Si  $D$  est un  $(\varphi, N, G_{L/K})$ -module filtré admissible, alors il existe une représentation  $p$ -adique  $V$  de  $G_K$  qui devient semi-stable quand on la restreint à  $G_L$  et telle que  $D = \mathbf{D}_{\text{st}, L}(V)$ .*

*Démonstration.* — Si  $D$  est un  $(\varphi, N, G_{L/K})$ -module filtré admissible, alors le théorème IV.2.4 montre que  $\mathcal{M}(D)$  est un  $(\varphi, \Gamma_K)$ -module étale sur  $\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^\dagger$  ce qui fait que l'on peut écrire  $\mathcal{M}(D) = \mathbf{B}_{\text{rig}, K}^\dagger \otimes_{\mathbf{B}_K^\dagger} \mathbf{D}^\dagger$  où  $\mathbf{D}^\dagger$  est un  $(\varphi, \Gamma_K)$ -module étale sur  $\mathbf{B}_K^\dagger$ . Par la construction

$\mathbf{D}^\dagger \mapsto V(\mathbf{D}^\dagger)$  rappelée au paragraphe précédent, il existe une représentation  $p$ -adique  $V$  de  $G_K$  telle que  $\mathbf{D}^\dagger = \mathbf{D}^\dagger(V)$ .

Rappelons que par [Ber02, théorème 3.6], si  $V$  est une représentation  $p$ -adique de  $G_K$ , alors  $\mathbf{D}_{\text{st},L}(V) = (\mathbf{B}_{\text{rig},L}^\dagger[\ell_X, 1/t] \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger} \mathbf{D}_{\text{rig}}^\dagger(V))^{\Gamma_L}$ . Dans notre cas, le fait que

$$\mathbf{B}_{\text{rig},L}^\dagger[\ell_X, 1/t] \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger} \mathcal{M}(D) = \mathbf{B}_{\text{rig},L}^\dagger[\ell_X, 1/t] \otimes_{L_0} D$$

et que  $(\mathbf{B}_{\text{rig},L}^\dagger[\ell_X, 1/t])^{\Gamma_L} = L_0$  montrent que  $D = (\mathbf{B}_{\text{rig},L}^\dagger[\ell_X, 1/t] \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger} \mathbf{D}_{\text{rig}}^\dagger(V))^{\Gamma_L}$  et donc que  $D = \mathbf{D}_{\text{st},L}(V)$  en tant que  $(\varphi, N, G_{L/K})$ -modules. Il reste à voir que la filtration de  $L \otimes_{L_0} D$  construite dans le théorème III.2.3 coïncide avec la filtration provenant de l'isomorphisme  $(L \otimes_{L_0} \mathbf{D}_{\text{st},L}(V))^{G_{L/K}} = \mathbf{D}_{\text{dR}}(V)$ . Pour cela, il suffit de constater que par [Ber02, §2.4], l'application  $\iota_n$  envoie  $\mathbf{B}_{\text{rig},L}^\dagger[\ell_X, 1/t] \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger} \mathbf{D}_{\text{rig}}^\dagger(V)$  dans  $\mathbf{B}_{\text{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$  et donc  $L_n((t)) \otimes_L D_L$  dans  $\mathbf{B}_{\text{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$  ce qui fait que, comme pour  $n$  assez grand on a (cf [Ber02, §5.3] et [Fon00, §3]) :

$$L_n[[t]] \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}}^{\iota_n} \mathbf{D}_{\text{rig}}^{\dagger,r}(V) = \text{Fil}^0(L_n((t)) \otimes_K \mathbf{D}_{\text{dR}}(V)),$$

que la filtration construite dans le théorème III.2.3 coïncide avec la filtration provenant de celle de  $\mathbf{B}_{\text{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$ , et donc de  $\mathbf{D}_{\text{dR}}(V)$ .

On a donc construit une représentation  $p$ -adique  $V$  de  $G_K$  dont la restriction à  $G_L$  est semi-stable et telle que  $\mathbf{D}_{\text{st},L}(V) = D$  en tant que  $(\varphi, N, G_{L/K})$ -modules filtrés.  $\square$

**Remarque V.2.2.** — La démonstration ci-dessus utilise la construction  $D \mapsto \mathcal{M}(D)$  mais pas la caractérisation de l'image essentielle de ce foncteur, ce qui fait que notre démonstration n'utilise pas le théorème de monodromie  $p$ -adique (mais on utilise la filtration par les pentes de Frobenius).

Pour finir, nous allons récapituler les différents objets que l'on associe à une représentation  $p$ -adique  $V$  de  $G_K$  semi-stable quand on la restreint à  $G_L$ . Ces objets sont :

- (1) le  $(\varphi, N, G_{L/K})$ -module filtré  $\mathbf{D}_{\text{st},L}(V)$  ;
- (2) l'équation différentielle  $p$ -adique  $\mathbf{N}_{\text{dR}}(V)$  ;
- (3) le  $(\varphi, \Gamma_K)$ -module étale sur l'anneau de Robba  $\mathbf{D}_{\text{rig}}^\dagger(V)$ .

Ces objets sont reliés entre eux de la manière suivante (rappelons que par le théorème III.2.3, la donnée de  $\mathbf{D}_{\text{rig}}^\dagger(V)$  détermine une filtration sur  $L \otimes_{L_0} \text{Sol}_L(\mathbf{N}_{\text{dR}}(V))$ ) :

**Théorème V.2.3.** — Si  $V$  est une représentation  $p$ -adique de  $G_K$  semi-stable quand on la restreint à  $G_L$ , alors :

- (1)  $\mathbf{D}_{\text{st},L}(V) = \text{Sol}_L(\mathbf{N}_{\text{dR}}(V))$  avec la filtration provenant de  $\mathbf{D}_{\text{rig}}^\dagger(V)$  ;

- (2)  $\mathbf{D}_{\text{rig}}^\dagger(V) = \mathcal{M}(\mathbf{D}_{\text{st},L}(V))$  ;
- (3)  $\mathbf{N}_{\text{dR}}(V) = (\mathbf{B}_{\text{rig},L}^\dagger[\ell_X] \otimes_{L_0} \mathbf{D}_{\text{st},L}(V))^{H_K, N=0}$ .

Ces identifications sont compatibles à toutes les structures en présence.

*Démonstration.* — La démonstration du théorème V.2.1 montre que l'on a  $\mathbf{D}_{\text{rig}}^\dagger(V) = \mathcal{M}(\mathbf{D}_{\text{st},L}(V))$ . Si on pose  $\mathbf{N} = (\mathbf{B}_{\text{rig},L}^\dagger[\ell_X] \otimes_{L_0} \mathbf{D}_{\text{st},L}(V))^{H_K, N=0}$ , alors  $\mathbf{N}[1/t] = \mathbf{D}_{\text{rig}}^\dagger(V)[1/t]$  et  $\mathbf{N}$  est un  $(\varphi, \Gamma_K)$ -module tel que  $\nabla_{\mathbf{N}}(\mathbf{N}) \subset t\mathbf{N}$  ce qui fait que  $\mathbf{N} = \mathbf{N}_{\text{dR}}(V)$  par [Ber02, théorème 5.10]. Enfin, le fait que  $\mathbf{D}_{\text{rig}}^\dagger(V) = \mathcal{M}(\mathbf{D}_{\text{st},L}(V))$  et que  $\mathbf{N}_{\text{dR}}(V)[1/t] = \mathcal{M}(\mathbf{D}_{\text{st},L}(V))[1/t]$  montrent que  $\mathbf{D}_{\text{st},L}(V) = \text{Sol}_L(\mathbf{N}_{\text{dR}}(V))$  avec la filtration provenant de  $\mathbf{D}_{\text{rig}}^\dagger(V)$ .  $\square$

Remarquons que le fait qu'on retrouve l'action de  $G_{L/K}$  à partir de  $\mathbf{N}_{\text{dR}}(V)$  avait été observé par Marmora (cf [Mar03, §4.2]).

**V.3. Construction de  $\mathbf{D}^\dagger(V)$ .** — Dans tout ce paragraphe,  $V$  est une représentation semi-stable de  $G_K$ . Comme on l'a signalé au paragraphe précédent, on peut récupérer  $\mathbf{D}_{\text{rig}}^\dagger(V)$  à partir de  $\mathbf{D}_{\text{st}}(V)$  par la recette  $\mathbf{D}_{\text{rig}}^\dagger(V) = \mathcal{M}(\mathbf{D}_{\text{st}}(V))$ . Plus explicitement, si on regarde comment le foncteur  $\mathcal{M}$  est défini, on voit que  $\mathbf{D}_{\text{rig}}^\dagger(V)$  est l'ensemble des  $x \in \mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}[\ell_X, 1/t] \otimes_{K_0} \mathbf{D}_{\text{st}}(V)$  tels que :

- (1)  $N(x) = 0$  ;
- (2)  $\varphi^{-n}(x) \in \text{Fil}^0(K_n((t)) \otimes_K \mathbf{D}_{\text{dR}}(V))$  pour tout  $n \geq n(r)$ .

L'objet de ce chapitre est de montrer comment récupérer le  $\mathbf{B}_K^{\dagger,r}$ -module  $\mathbf{D}^{\dagger,r}(V)$  à partir de  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}[\ell_X, 1/t] \otimes_{K_0} \mathbf{D}_{\text{st}}(V)$ .

Rappelons que l'on a construit dans [Ber02, §2] un anneau  $\widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger,r}$  qui contient  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}$  et aussi l'anneau  $\widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^+$  de [Ber02, §1.2] (dont on rappelle brièvement la construction ci-dessous). Nous allons rappeler la définition de l'ordre d'un élément  $x \in \widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger,r}$ . Pour cela, rappelons (cf [Ber02, §2.1]) que l'anneau  $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}$  construit dans [CC98] est un sous-anneau du corps des fractions  $W(\widetilde{\mathbf{E}})[1/p]$  de l'anneau des vecteurs de Witt sur un corps valué  $\widetilde{\mathbf{E}}$  et que si  $x = \sum_{k \gg -\infty} p^k [x_k] \in \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}$  et si  $I$  est un intervalle compris dans  $[r; +\infty[$ , alors la formule :

$$V_I(x) = \left\lfloor \inf_{\alpha \in I} \inf_{k \in \mathbf{Z}} k + \frac{p-1}{p\alpha} v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x_k) \right\rfloor$$

définit une valuation sur  $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}$  et que par définition (cf [Ber02, §2.3]),  $\widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger,r}$  est le complété de  $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}$  pour la topologie de Fréchet définie par l'ensemble des valuations  $\{V_{[r;s]}\}_{s \geq r}$ .

Si  $s \geq r$ , on a par conséquent une valuation  $V_{[s;s]}$  sur  $\widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger,r}$  dont on peut montrer (cf [Col03, §7.2] et [Ber02, lemme 2.7]) que la restriction à  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}$  coïncide avec la partie entière de la

valuation associée à la norme « sup sur la couronne de rayon  $p^{-1/e_k s}$  ». Posons  $\rho = (p-1)/p$ . Si  $x \in \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger, r}$  et  $n$  est assez grand, alors  $\varphi^{-n}(x) \in \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger, \rho}$ . On pose  $I(x) = \{s \in \mathbf{R} \text{ tels que la suite } \{ns + V_{[\rho, \rho]}(\varphi^{-n}(x))\} \text{ est bornée inférieurement}\}$ , ce qui fait que soit  $I(x)$  est vide, soit il existe  $\alpha \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$  tel que  $I(x) = [\alpha; \infty[$  ou  $I(x) = ]\alpha; \infty[$ .

**Définition V.3.1.** — Si  $I(x) = [\alpha; \infty[$ , on dit que  $x$  est d'ordre  $\alpha$  et si  $I(x) = ]\alpha; \infty[$  on dit que  $x$  est d'ordre  $\alpha^+$ . On écrit alors  $\text{ord}(x) = \alpha$  ou  $\text{ord}(x) = \alpha^+$ .

Rappelons que l'on a écrit  $\ell_X$  pour l'élément  $\log(\pi)$  de [Ber02, §2.4] et que  $\log(\pi) = \log[\bar{\pi}] + \log([\bar{\pi}]/\pi)$  avec  $\log([\bar{\pi}]/\pi) \in \tilde{\mathbf{B}}_{\mathbf{Q}_p}^{\dagger}$  ce qui nous permet de prolonger  $\text{ord}(\cdot)$  à  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger}[\ell_X] = \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger}[\log[\bar{\pi}]]$  en décidant que  $\text{ord}(x_0 + x_1 \log[\bar{\pi}] + \cdots + x_k \log[\bar{\pi}]^k) = \sup_{0 \leq i \leq k} \text{ord}(x_i) + i$ .

**Proposition V.3.2.** — La fonction  $\text{ord}$  vérifie les propriétés suivantes :

- (1)  $\text{ord}(x + y) \leq \max(\text{ord}(x), \text{ord}(y))$  et  $\text{ord}(xy) \leq \text{ord}(x) + \text{ord}(y)$  ;
- (2)  $t = \log(1 + X)$  est d'ordre 1 et  $\text{ord}(tx) = \text{ord}(x) + 1$  ;
- (3)  $x \in \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger}$  appartient à  $\tilde{\mathbf{B}}^{\dagger}$  si et seulement si  $\text{ord}(x) \leq 0$  ;
- (4) Si  $f(X_K) = \sum_{i \in \mathbf{Z}} a_i X_K^i \in \mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger, r}$ , et  $s \geq 0$ , alors notre définition de l'ordre coïncide avec la définition habituelle, c'est-à-dire que  $s \in I(x)$  si et seulement si  $\{v_p(a_i) + s \log(i)/\log(p)\}_{i \geq 1}$  est bornée inférieurement.

*Démonstration.* — Le point (1) est immédiat. Le point (2) suit du fait que  $\varphi(t) = pt$ . Le point (3) suit du fait que  $x \in \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger, r}$  appartient à  $\tilde{\mathbf{B}}^{\dagger, r}$  si et seulement si  $\{V_{[r, s]}(x)\}_{s \geq r}$  est bornée inférieurement, c'est-à-dire si  $0 \in I(x)$ .

Pour montrer le point (4), rappelons (cf [Ber02, §2.1]) que  $V_{[r, s]}(\varphi^{-1}(x)) = V_{[pr, ps]}(x)$  et donc que  $s \in I(x)$  si et seulement si la suite  $\{ns + V_{[\rho_n, \rho_n]}(x)\}$  est bornée inférieurement, avec  $\rho_n = p^{n-1}(p-1)$  (ce qui fait que  $\rho = \rho_0$ ). Si  $f(X_K) \in \mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger, r}$ , et  $s \geq r$ , alors  $V_{[s, s]}(f(X_K)) = \lfloor v_p(\sup_{z \in C_K[s, s]} |f(z)|_p) \rfloor$ , et par la théorie classique des fonctions holomorphes, on a :

$$v_p \left( \sup_{z \in C_K[\rho_n, \rho_n]} |f(z)|_p \right) = \inf_{i \in \mathbf{Z}} \left( v_p(a_i) + \frac{i}{e_K p^{n-1}(p-1)} \right),$$

ce qui fait que pour montrer le point (4), il suffit de montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- (1) la suite  $\{v_p(a_i) + s \log(i)/\log(p)\}_{i \geq 1}$  est bornée inférieurement ;
- (2) la suite double  $\{ns + v_p(a_i) + i/(e_K p^{n-1}(p-1))\}_{i \geq 1, n \geq n(r)}$  est bornée inférieurement.

Ceci est un exercice d'analyse (réelle!). □



La propriété (2) de la proposition ci-dessus nous permet d'étendre  $\text{ord}$  à  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^+[\ell_X, 1/t]$  en posant  $\text{ord}(x) = \text{ord}(t^h x) - h$  pour  $h \gg 0$ .

Si  $\mathbf{B}_{\text{cris}}^+$  dénote l'anneau construit dans [Fo94a], tel que  $\mathbf{B}_{\text{st}} = \mathbf{B}_{\text{cris}}^+[\log[\bar{\pi}], 1/t]$ , alors l'anneau  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^+$  est défini par  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^+ = \cap_{n=0}^{\infty} \varphi^n(\mathbf{B}_{\text{cris}}^+)$  et a les propriétés suivantes :

- (1) si  $V$  est une représentation  $p$ -adique, alors  $\mathbf{D}_{\text{st}}(V) = (\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^+[\log[\bar{\pi}], 1/t] \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K}$  ;
- (2)  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^+ \subset \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger, r}$  et en fait, c'est le complété pour la topologie de Fréchet du sous-anneau de  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger, r}$  formé des éléments  $\sum_{k \gg -\infty} p^k [x_k]$  tels que  $v_{\tilde{\mathbf{E}}}(x_k) \geq 0$  pour tout  $k$ .

Le lemme suivant est immédiat et généralise le (2) de la proposition ci-dessus.

**Lemme V.3.3.** — *Soit  $V$  une représentation semi-stable de  $G_K$  et  $D$  un sous- $\varphi$ -module de  $\mathbf{D}_{\text{st}}(V)$  de pente  $\alpha \in \mathbf{Q}$ . Si  $M = (m_{j,i}) \in \text{M}(d, \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^+[\log[\bar{\pi}], 1/t])$  est la matrice d'éléments de  $D$  dans une base de  $V$ , alors  $\text{ord}(m_{j,i}) = \alpha$ .*

Nous pouvons maintenant énoncer et démontrer le résultat principal de ce chapitre.

**Théorème V.3.4.** — *Si  $V$  est une représentation semi-stable de  $G_K$  et si*

- $\{e_i\}_{i=1 \dots d}$  est une base de  $\mathbf{D}_{\text{st}}(V)$  adaptée à la décomposition par les pentes de Frobenius ;
- $N(e_i) = \sum_{j=1}^d n_{j,i} e_j$  ;
- $\{f_j\}_{j=1 \dots d}$  est une base de  $\mathbf{D}_{\text{dR}}(V)$  adaptée à la filtration et  $\varphi^{-n}(e_i) = \sum_{j=1}^d p_{j,i}^{(n)} f_j$ ,

alors  $x = \sum_{i=1}^d x_i \otimes e_i \in \mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger, r}[\ell_X, 1/t] \otimes_{K_0} \mathbf{D}_{\text{st}}(V)$  appartient à  $\mathbf{D}^{\dagger, r}(V)$  si et seulement si :

- (1)  $N(x_j) + \sum_{i=1}^d n_{j,i} x_i = 0$  pour  $j = 1 \dots d$  ;
- (2)  $\sum_{i=1}^d \iota_n(x_i) p_{j,i}^{(n)} \in t^{-t_H(f_j)} K_n[[t]]$  pour  $j = 1 \dots d$  et  $n \geq n(r)$  ;
- (3)  $\text{ord}(x_i) \leq -\text{pente}(e_i)$  pour  $i = 1 \dots d$ .

*Démonstration.* — Un petit calcul montre que la condition (1) est équivalente à  $N(x) = 0$  et que la condition (2) est équivalente à  $\varphi^{-n}(x) \in \text{Fil}^0(K_n((t)) \otimes_K \mathbf{D}_{\text{dR}}(V))$  pour tout  $n \geq n(r)$ , ce qui fait que, comme on l'a rappelé plus haut,  $x \in \mathbf{D}_{\text{rig}}^{\dagger, r}(V)$  si et seulement s'il satisfait (1) et (2).

Supposons donc que  $x \in \mathbf{D}_{\text{rig}}^{\dagger, r}(V)$  satisfait (3). Si  $\{v_i\}_{i=1 \dots d}$  est une base de  $V$  et si l'on écrit  $e_i = \sum_{j=1}^d m_{j,i} v_j$ , alors  $m_{j,i} \in \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^+[\log[\bar{\pi}], 1/t]$  et le fait que  $e_i$  est dans un  $\varphi$ -module de pente  $\text{pente}(e_i)$  implique par le lemme V.3.3 que  $\text{ord}(m_{j,i}) \leq \text{pente}(e_i)$ , ce qui fait que si  $x = \sum_{i=1}^d x_i e_i = \sum_{j=1}^d y_j v_j$ , alors  $\text{ord}(y_j) = \text{ord}(\sum_{i=1}^d x_i m_{j,i}) \leq 0$ . Par le (3) de la proposition V.3.2, cela implique que  $y_j \in \tilde{\mathbf{B}}^{\dagger}$  et donc que  $y_j \in \mathbf{B}_{\text{rig}}^{\dagger, r} \cap \tilde{\mathbf{B}}^{\dagger} = \mathbf{B}^{\dagger, r}$  ce qui fait que  $x \in \mathbf{D}^{\dagger, r}(V)$ . La réciproque est immédiate.  $\square$

**Remarque V.3.5.** — Si  $K = K_0$  et  $N = 0$ , alors la condition (2) équivaut à : « pour tout  $n \geq n(r)$ , la fonction  $\sum_{i=1}^d \varphi^n(p_{j,i}^{(n)})x_i(X)$  a un zéro d'ordre au moins  $-t_H(f_j)$  en  $\varepsilon^{(n)} - 1$  ». La stabilité de  $\mathbf{D}^{\dagger,r}(V)$  sous l'action de  $\Gamma_K$  montre que l'on peut remplacer  $\varepsilon^{(n)} - 1$  par n'importe quelle racine primitive  $p^n$ -ième de 1.

## Appendice A

### Liste des notations

Voici une liste des principales notations dans l'ordre où elles apparaissent :

I :  $K, k_K, K_n, K_\infty, K_0, K'_0, G_K, H_K, \Gamma_K, \sigma$ .

I.1 :  $L, G_{L/K}, D_L, t_N(D), t_H(D)$ .

I.2 :  $F, \mathbf{B}_F^{\dagger,r}, \varphi, \mathbf{B}_F^\dagger, \mathbf{B}_F, e_K, \mathbf{B}_K, \mathbf{B}_K^\dagger, r_0(K), \mathbf{B}_K^{\dagger,r}, C_K[r; s], \mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}, t, \mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger, r(K), \iota_n, n(r), \nabla, \partial, q$ .

I.3 :  $\mathbf{D}_r, r(\mathbf{D}), \otimes^{\iota_n}$ .

II.1 :  $\varphi_n, M_n$ .

II.2 :  $\ell_X, \xi_n, D_K^n, M_n(D), \mathcal{M}(D)$ .

III.1 :  $\nabla_{\mathbf{D}}, V_{[r;s]}$ .

III.2 :  $\partial_{\mathbf{D}}, S_L(\mathbf{D}), \text{Sol}_L(\mathbf{D})$ .

V.1 :  $\mathbf{B}_{\text{st}}, \mathbf{B}_{\text{dR}}, \mathbf{B}^\dagger, \mathbf{D}_{\text{st},L}(V), \mathbf{D}_{\text{dR}}(V), \mathbf{D}^\dagger(V), V(\mathbf{D}^\dagger), \mathbf{D}_{\text{rig}}^\dagger(V), \mathbf{N}_{\text{dR}}(V)$ .

V.3 :  $\widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger,r}, \widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^+, \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}, V_{[r;s]}, \text{ord}, \log[\overline{\pi}], \mathbf{B}_{\text{cris}}^+$ .

## Appendice B

### Erratum à [Ber02]

Comme cet article fait assez naturellement suite à « Représentations  $p$ -adiques et équations différentielles » ([Ber02]), il me semble utile de donner un erratum. Je remercie P. Colmez, J-M. Fontaine, J. Teitelbaum et H. Zhu pour leurs remarques.

*Exemple 2.8, 1* : remplacer  $\mathbf{A}_{\text{max}}^+$  par  $\mathbf{A}_{\text{max}}$ .

*Sections 3.3, 5.5* : Kedlaya a complètement modifié son article [34] et la plupart des numéros des références sont donc incorrects.

*Théorème 4.10* : le théorème 4.10 est en fait dû à Forster, voir : O. Forster, Zur Theorie der Steinschen Algebren und Moduln, Math. Zeitschrift, 97, p. 376ff, 1967.

*Proposition 2.24* : l'application  $\log$  n'est bien sûr pas définie pour  $x = 0$ . De plus je ne l'ai définie que pour  $\tilde{\mathbf{A}}^+$  mais plus tard, je l'utilise sur  $\tilde{\mathbf{A}}^\dagger$  (par exemple :  $\log(\pi_K)$ ). Il faut donc l'étendre à  $\tilde{\mathbf{A}}^\dagger$  ce que fait Colmez dans [Col03]. On peut aussi le faire « à la main ».

*Démonstration du lemme 5.27* : remplacer  $\mathrm{GL}_d(\mathbf{A}^{\dagger,r}, K)$  par  $\mathrm{GL}_d(\mathbf{A}_K^{\dagger,r})$  et de même, remplacer  $M_d(\mathbf{A}^{\dagger,r}, K)$  par  $M_d(\mathbf{A}_K^{\dagger,r})$ .

*Matrices* : j'ai la mauvaise habitude d'écrire les matrices « à l'envers », par exemple si  $f$  et  $g$  sont deux applications semi-linéaires, alors dans mes notations  $\mathrm{Mat}(fg) = f(\mathrm{Mat}(g)) \mathrm{Mat}(f)$ . Pour retrouver la notation habituelle, il faut tout transposer (ce que j'ai fait dans mes autres articles).

*Démonstration de la proposition 5.15* : il n'est pas vrai que  $\iota_n(N_s) = K_n[[t]] \otimes_K \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ . Ce qui est vrai, c'est que l'image de  $\iota_n$  est dense pour la topologie  $t$ -adique. C'est ce qui est démontré et utilisé dans le reste de la preuve.

*p.229 l.3* : remplacer  $\tilde{\mathbf{A}}^+$  par  $\tilde{\mathbf{A}}$ .

*L'anneau  $\mathbf{B}_K^\dagger$*  : il est affirmé que l'anneau  $\mathbf{B}_K^\dagger$  est un anneau de séries formelles à coefficients dans  $F$  ce qui n'est pas toujours le cas. C'est un anneau de séries formelles à coefficients dans l'extension maximale non-ramifiée de  $F$  dans  $K_\infty$ , qui peut être plus grande que  $F$ . Comme il est vrai que  $(\mathbf{B}_K^\dagger)^{\Gamma_K} = F$ , cela n'affecte pas les résultats de l'article, et les démonstrations sont presque inchangées.

*Monodromie* : pour retrouver le  $(\varphi, N)$ -module  $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(\cdot)$ , il faut prendre  $N(\log(\pi)) = -p/(p-1)$  au lieu de  $N(\log(\pi)) = -1$ .

*Diagramme p. 271* : dans le diagramme en haut de la page, remplacer  $\nabla_M$  par la connexion associée à  $\partial_M$ .

*Lemme 2.7* : remplacer  $k \gg 0$  par  $k \gg -\infty$  dans  $\sum_{k \gg 0} p^k [x_k]$ .

## Références

- [And02] ANDRÉ Y. : *Filtrations de Hasse-Arf et monodromie  $p$ -adique*. Invent. Math. 148 (2002), no. 2, 285–317.
- [Ber02] BERGER L. : *Représentations  $p$ -adiques et équations différentielles*. Invent. Math. 148 (2002), no. 2, 219–284.
- [Ber04] BERGER L. : *Limites de représentations cristallines*. Compositio Mathematica, à paraître.
- [Che96] CHERBONNIER F. : *Représentations  $p$ -adiques surconvergentes*. Thèse de l'Université d'Orsay, 1996.
- [CC98] CHERBONNIER F., COLMEZ P. : *Représentations  $p$ -adiques surconvergentes*. Invent. Math. 133 (1998), 581–611.
- [CC99] CHERBONNIER F., COLMEZ P. : *Théorie d'Iwasawa des représentations  $p$ -adiques d'un corps local*. J. Amer. Math. Soc. 12 (1999), 241–268.

- [Col99] COLMEZ P. : *Représentations cristallines et représentations de hauteur finie*. J. Reine Angew. Math. 514 (1999), 119–143.
- [Col01] COLMEZ P. : *Les conjectures de monodromie  $p$ -adiques*. Séminaire Bourbaki, 2001/02, Astérisque No. 290 (2003), Exp. No. 897, 53–101.
- [Col02] COLMEZ P. *Espaces de Banach de dimension finie*. Journal of the Inst. of Math. Jussieu (2002) 1(3), 331–439.
- [Col03] COLMEZ P. : *Espaces Vectoriels de dimension finie et représentations de de Rham*. En préparation.
- [Col04] COLMEZ P. : *La conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer  $p$ -adique*. Séminaire Bourbaki, 2002/03, Astérisque No. 294 (2004), Exp. No. 919, 251–319.
- [CF00] COLMEZ P., FONTAINE J-M. : *Construction des représentations  $p$ -adiques semi-stables*. Invent. Math. 140 (2000) 1–43.
- [FW79] FONTAINE J-M., WINTENBERGER J-P. : *Le “corps des normes” de certaines extensions algébriques de corps locaux*. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B 288 (1979), no. 6, A367–A370.
- [Fo94a] FONTAINE J-M. : *Le corps des périodes  $p$ -adiques*. Périodes  $p$ -adiques (Bures-sur-Yvette, 1988), Astérisque 223 (1994) 59–111.
- [Fo94b] FONTAINE J-M. : *Représentations  $p$ -adiques semi-stables*. Périodes  $p$ -adiques, (Bures-sur-Yvette, 1988), Astérisque 223 (1994) 113–184.
- [Fon90] FONTAINE J-M. : *Représentations  $p$ -adiques des corps locaux I*. The Grothendieck Festschrift, Vol. II, 249–309, Progr. Math. 87, Birkhäuser Boston, Boston, MA 1990.
- [Fon00] FONTAINE J-M. : *Arithmétique des représentations galoisiennes  $p$ -adiques*. Prépublication 2000-24 (Orsay).
- [Fon04] FONTAINE J-M. : *Représentations de de Rham et représentations semi-stables*. Prépublication 2004-12 (Orsay).
- [Ked04] KEDLAYA K. : *A  $p$ -adic local monodromy theorem*. Ann. of Math., à paraître.
- [Laz62] LAZARD M. : *Les zéros des fonctions analytiques d’une variable sur un corps valué complet*. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 14 1962 47–75.
- [Mar03] MARMORA A. : *Irrégularité et conducteur de Swan  $p$ -adiques*. Prépublication 2003-27 du LAGA (Villetaneuse).
- [Meb02] MEBKHOUT Z. : *Analogie  $p$ -adique du théorème de Turrittin et le théorème de la monodromie  $p$ -adique*. Invent. math. 148 (2002), 319–351.
- [Win83] WINTENBERGER J-P. : *Le corps des normes de certaines extensions infinies des corps locaux ; applications*. Ann. Sci. École Norm. Sup. 16 (1983), 59–89.

---

Juin 2004

LAURENT BERGER, 52 Rue de Nanterre, 92600 Asnières, France • E-mail : laurent@math.harvard.edu  
 Url : www.math.harvard.edu/~laurent